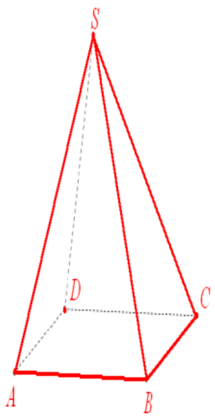
تمرين 6:



تتحرك نملة على هرم SABCD رأسه العلوي S. بحيث تنتقل من أي رأس من رؤوسه نحو رأس مجاور له (نفرض أنّ الاحتمالات متساوية)، نقول عندئذ أنّ هذه النملة قد «أنجزت خطوة». نفرض أنّ النملة موجودة على الرأس A عند بداية التنقل.

1. بعد أن تنجز النملة خطوتين، ما هو احتمال أن تكون في:
   (ب) الرأس A؟
   (ج) الرأس B؟
   (د) الرأس C؟
   (ه) الرأس D؟

2. من أجل كل عدد طبيعي n غير مع معدوم، نرمز بالرمز Sn إلى الحادثة « النملة موجودة على الرأس S بعد n خطوة »، وبالرمز p_n إلى احتمال تحقق هذه الحادثة، أي $p_n = p(s_n)$.
   (ب) ما هي قيمة p_1؟
   (ج) بملاحظة أنّ $s_{n+1} = s_{n+1} \cap \overline{s_n}$، أثبت أنّ $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

3. نعتبر المتتالية $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي:
   $p_1 = \frac{1}{3}$ و $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.
   (ب) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n غير المعدوم أنّ :
   $p_n = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$.
   (ج) عيّن $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

4. لتكن E_n الحادثة :
   « مرّة النملة مرّة واحدة على الأقل على الرأس S خلال إنجازها n خطوة الأولى ».
   عبّر عن $p(E_n)$ بدلالة n.

$$P(S_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(S_{n+1}) + p(B_n)p_{B_n}(S_{n+1}) + p(C_n)p_{C_n}(S_{n+1}) + p(D_n)p_{D_n}(S_{n+1})$$

$$P(S_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} + d_n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

وحيث $a_n + b_n + c_n + d_n + p_n = 1$ إذن $a_n + b_n + c_n + d_n = 1 - p_n$

C.N.I.I.P.D.T.I.C.E

وبالتالي $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$.و. هـ. م.

1. (أ) نبرهن بالتراجع أنّ: $p_n=\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$.......(*)

لدينا فرضا $p_1=\frac{1}{3}$ و $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$.

• **بداية التراجع:** نتحقق من صحة المساواة من أجل $n=1$.

لدينا من جهة $p_1=\frac{1}{3}$

ولدينا من جهة أخرى من أجل $n=1$ ، $\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^1\right]=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}=p_1$

إذن المساواة (*) محققة من أجل $n=1$.

• **برهان التراجع:** نفرض أنّ المساواة محققة من أجل الرتبة k ، ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $k+1$.

نعلم أنّ (*) $p_{k+1}=\frac{1}{3}(1-p_k)$ ...*

ولدينا حسب فرضية التراجع $p_k=\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right]$...(**)

إذن بتعويض (**) في (*) نجد: $p_{k+1}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)\right]$

ومنه $p_{k+1}=\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right]$.

• **برهان التراجع:** مبدأ البرهان بالتراجع يُقِرُّ بأنّ $p_n=\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

(ب) تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

نطبق لأجل ذلك المبرهنة: إذا كان $(-1<r<1)$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=0$.

لدينا هنا $r=-\frac{1}{3}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$.

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{4}$.

2. التعبير عن $p(E_n)$ بدلالة n.

لدينا E_n هي الحادثة:
« مرّت النملة مرّة واحدة على الأقل على الرأس S خلال إنجازها n خطوة الأولى ».
نهتم بالحادثة النافية لها $\overline{E}_n$:
« لم تمر النملة أبدا على الرأس S خلال إنجازها n خطوة الأولى ».
نضع $x_n = p(\overline{E}_n)$.
ولدينا $\overline{E}_{n+1} = \overline{E}_n \cap \overline{S}_{n+1}$ مع $p(\overline{E}_n) \neq 0$.
ومنه $p(\overline{E}_{n+1}) = p(\overline{E}_n) p_{\overline{E}_n}(\overline{S}_{n+1})$.
وحيث أنّ هو احتمال أن تصل النملة إلى أحد رؤوس المربع $ABCD$ انطلاقا من أحد هذه الرؤوس، إذن $p_{\overline{E}_n}(\overline{S}_{n+1}) = \frac{2}{3}$ وبالتعويض نجد $x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$.
من الواضح أنّ المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هي هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل $x_1 = p(\overline{E}_1) = \frac{2}{3}$.
إذن $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
وبالتالي $p(E_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.