

حل- 6 - :

نرمز، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، بالرمز A_n للحادثة: «النملة موجودة على الرأس A بعد n خطوة»، ونفس الشيء بالنسبة إلى الرموز B_n ، C_n ، D_n . ونضع $a_n = p(A_n)$ ، $b_n = p(B_n)$ ، $c_n = p(C_n)$ ،

1. حساب احتمال أن تكون النملة على الرأس A بعد الخطوة الثانية

حتى تتمكن النملة الانتقال إلى الرأس A بعد الخطوة الثانية، لا بد أن يكون موضعها بعد الخطوة الأولى هو أحد الرؤوس B أو D أو S .

$$A_2 = (B_1 | A_2) \cup (D_1 | A_2) \cup (S_1 | A_2)$$

وحيث أن الأحداث $(B_1 | A_2)$ ، $(D_1 | A_2)$ ، $(S_1 | A_2)$ غير متلائمة مثنى مثنى، فإن:

$$P(A_2) = p(B_1 | A_2) + p(D_1 | A_2) + p(S_1 | A_2)$$

$$P(A_2) = p(B_1)p_{B_1}(A_2) + p(D_1)p_{D_1}(A_2) + p(S_1)p_{S_1}(A_2)$$

$$P(A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{36} \quad \text{أي}$$

$$P(C_2) = \frac{11}{36} \quad \text{بنفس الطريقة نتحصل على}$$

حتى تتمكن النملة الانتقال إلى الرأس B بعد الخطوة الثانية، لا بد أن يكون موضعها بعد الخطوة الأولى هو الرأس S .

$$B_2 = S_1 | B_2 \quad \text{وبالتالي} \quad p(B_2) = p(S_1 | B_2) = p(S_1)p_{S_1}(B_2)$$

$$p(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \text{وبالتعويض نجد}$$

$$p(D_2) = \frac{1}{12} \quad \text{بنفس الطريقة نتحصل على}$$

2. (أ) لنبحث عن قيمة p_1 .

نعلم أن للنملة نفس الحظوظ في التنقل من الرأس A نحو أحد الرؤوس B ، D ، S وهذا يعني أن

$$p_1 = p(S_1) = \frac{1}{3}$$

$$(ب) \text{ نثبت أن } p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

طريقة أولى: حسب الملاحظة $\bar{s}_n = s_{n+1} | s_{n+1}$ المقدمة في نص السؤال،

$$\text{لدينا } p(s_{n+1}) = p(s_{n+1} | \bar{s}_n) = p_{s_{n+1}}(s_{n+1})p(\bar{s}_n)$$

$$\text{وحيث } p(\bar{s}_n) = 1 - p(s_n) = 1 - p_n$$

وحيث أن $p_{s_{n+1}}(s_{n+1})$ هو احتمال أن تصل النملة إلى الرأس علما أنها تنتقل إليه من أحد رؤوس

$$p_{s_{n+1}}(s_{n+1}) = \frac{1}{3} \quad \text{أي المربع } ABCD.$$



$$\text{ينتج: } p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

طريقة ثانية: تعتمد هذه الطريقة على شجرة الاحتمالات (الشجرة المتزنة) على مستوى الوضعيتين: « موضع النملة n خطوة » و « موضع النملة $n+1$ خطوة ».

تشكل الأحداث A_n ، B_n ، C_n ، D_n ، S_n تجزئة لفضاء احتمال و احتمالاتها غير معدومة من أجل

$$a_n + b_n + c_n + d_n + p_n = 1 \text{ ومنه } (a_1 = 0 \text{ و } c_1 = 0)$$

ولدينا أيضا $S_{n+1} = (A_n \mid S_{n+1}) \cup (B_n \mid S_{n+1}) \cup (C_n \mid S_{n+1}) \cup (D_n \mid S_{n+1})$

$$\text{إذن } P(S_{n+1}) = p(A_n \mid S_{n+1}) + p(B_n \mid S_{n+1}) + p(C_n \mid S_{n+1}) + p(D_n \mid S_{n+1})$$