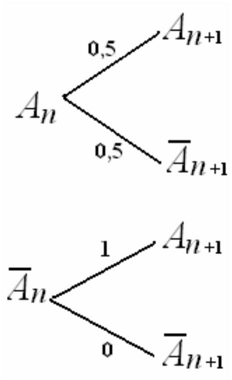
حلّ – 20 - :

نعرّف الحادثة A_n « تسحب الرسائل في اليوم ذي الرتبة n »

نسمي $\overline{A_n}$ الحادثة النافية للحادثة A_n.

لدينا:



p_n هو احتمال أن تسحب الرسائل في اليوم ذي الرتبة n.

إذن $p_n = p(A_n)$ ومنه $p(\overline{A_n}) = 1 - p_n$

نعلم من معطيات المسألة أنّ:

$p_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = 1$ و $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,5$

ومنه نستنتج أنّ:

$p_{\overline{A}_n}(\overline{A}_{n+1}) = 0$ و $p_{A_n}(\overline{A}_{n+1}) = 0,5$

وبالتالي تنتج شجرة الاحتمالات المقابلة التي تترجم معطيات المسألة.

وباستعمال قانون الاحتمالات الكلية ينتج:

$$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$$

$$= p(A_n).p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A}_n).p_{\overline{A}_n}(A_{n+1})$$

أي: $p_{n+1} = p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 1$

ومنه $p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + 1$.

لكتابة p_n بدلالة n، نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = p_{n+1} - p_n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

بالحساب نجد $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$ منه نستنتج أنّ :

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدّها الأوّل v_1 حيث $v_1 = p_2 - p_1 = -\frac{1}{2}$

ومنه حدّها العام هو $v_n = v_1 q^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

وحيث يمكننا كتابة $p_n = -\frac{2}{3}v_n + \frac{2}{3}$

نجد $p_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$.