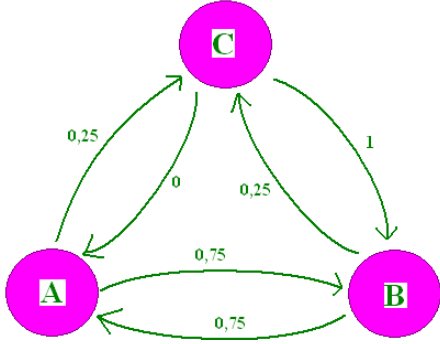


حلّ- 21 :-

نرمز بالرموز A ، B و C إلى كل من كمال وسعاد ورياض على الترتيب.

نعرف الأحداث الآتية:



A_n : « الكرة بحوزة كمال بعد الرمية ذات الرتبة n مباشرة »

B_n : « الكرة بحوزة سعاد بعد الرمية ذات الرتبة n مباشرة »

C_n : « الكرة بحوزة رياض بعد الرمية ذات الرتبة n مباشرة »

المخطط المقابل يشرح معطيات المسألة

إذن لدينا:

$$. p(C_n) = r_n \text{ و } p(B_n) = q_n \text{ و } p(A_n) = p_n$$

بما أنّ الكرة في بداية اللعب موجودة عند كمال فإن:

$$. p(C_0) = 0 \text{ و } p(B_0) = 0 \text{ و } p(A_0) = 1$$

حسب قانون الاحتمالات الكلية لدينا.

$$p(A_{n+1}) = p(A_n | A_{n+1}) + p(B_n | A_{n+1}) + p(C_n | A_{n+1})$$

$$p(B_{n+1}) = p(B_n | B_{n+1}) + p(A_n | B_{n+1}) + p(C_n | B_{n+1}) \quad \text{و}$$

$$p(C_{n+1}) = p(C_n | C_{n+1}) + p(A_n | C_{n+1}) + p(B_n | C_{n+1}) \quad \text{و}$$

باستعمال الاحتمالات الشرطية والتعويض نجد:

$$p(A_{n+1}) = p(A_n) \cdot p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A_{n+1}) + p(C_n) \cdot p_{C_n}(A_{n+1})$$

$$p(B_{n+1}) = p(B_n) \cdot p_{B_n}(B_{n+1}) + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B_{n+1}) + p(C_n) \cdot p_{C_n}(B_{n+1}) \quad \text{و}$$

$$p(C_{n+1}) = p(C_n) \cdot p_{C_n}(C_{n+1}) + p(A_n) \cdot p_{A_n}(C_{n+1}) + p(B_n) \cdot p_{B_n}(C_{n+1}) \quad \text{و}$$

نتنج مما سبق الجملة :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{3}{4}q_n \\ q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n \end{cases}$$



نعلم أنّ الكرة موجودة عند أحد اللاعبين الثلاثة وبالتالي مهما كان العدد الطبيعي n فإنّ

$$. p_n + q_n + r_n = 1$$

نفرض أن كل متتالية من المتتاليات الثلاثة تقبل نهاية منتهية عندما يُؤول n إلى اللانهاية، ونضع

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r. \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = q \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p$$

عندما نجعل n يُؤول إلى اللانهاية في الجملة السابقة نجد الجملة الموالية:

$$\begin{cases} p = \frac{3}{4}q \\ q = \frac{3}{4}p + r \\ r = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}q \end{cases}$$

ولدينا أيضا $p + q + r = 1$.

بالحساب المباشر نجد حلا واحدا لهذه الجملة هو $(p, q, r) = (\frac{12}{35}, \frac{16}{35}, \frac{1}{5})$.