Module 6 - Leçon 02 : Programmation linéaire 1 – Résolution graphique

1 - Principes

Il s'agit de déterminer la combinaison productive d'articles, de produits, compte tenu des matrices techniques et du programme des ventes à réaliser, qui maximise la rentabilité tout en saturant les contraintes productives (plein emploi des facteurs de production : main d'œuvre, matériels…).

Un programme linéaire comprend :

- ✓ des contraintes commerciales : le marché,
- ✓ des contraintes techniques : la capacité productive (main d'œuvre disponible, capacité heure machine, approvisionnement des matières).
- ✓ des contraintes logiques : les quantités produites doivent être positives ou nulles,
- ✓ un objectif à atteindre, l'optimisation d'une une marge, un résultat...

S'il y a peu de contraintes, on peut résoudre le problème par la méthode graphique qui consiste à rechercher la combinaison optimale de l'objectif à atteindre.

La recherche du point optimum par la résolution graphique n'est possible que si le nombre de variables est de deux. La démarche consiste à faire une représentation sur un repère orthonormé (i , j) des droites représentatives des contraintes commerciales, techniques et logiques ; de constater le champ des possibles (domaine d'acceptabilité) qui satisfont ces différentes contraintes et de la droite représentative de la fonction économique permettant la recherche de l'optimum dans le champ des possibles.

Si le nombre de variables est supérieur à deux (par exemple 2 produits), la résolution graphique ne peut être effectuée, il convient d'utiliser la résolution par la méthode de l'algorithme du Simplex.

2 - Application

Un atelier fabrique 2 modèles X et Y, le produit X ne peut être vendu à plus de 400 exemplaires, le produit Y ne peut être vendu à plus de 600 exemplaires. Pour fabriquer X il faut 3 heures de main d'œuvre, et 2 heures pour Y, en sachant que l'entreprise ne dispose de 1 800 heures de main d'œuvre.

La marge sur coût variable réalisée sur la vente d'un X est de 30 €, de la vente d'un Y est de 50 €.

Quelle est la combinaison productive qui permet de maximiser la marge sur coût variable ?

La définition du programme linéaire est la suivante :

- ✓ contraintes techniques : la production d'un X consomme 3 heures de main d'œuvre, la production d'un Y consomme 2 heures. La capacité de cet atelier est limité à 1 800 heures d'où inéquation suivante : $3x + 2y \leq 1\,800$,
- ✓ contraintes de marché : il n'est pas possible de vendre pour le produit X plus de 400 unités et pour le produit Y plus de 600 unités d'où les inéquations suivantes : $x \leq 400$ et $y \leq 600$,
- ✓ contraintes logiques : les quantités produites ne peuvent pas être négatives d'où les inéquations suivantes : $x \geq 0$ et $y \geq 0$,

Bernard Auge – Alexandre Vernhet

- ✓ fonction économique à maximiser : MAX B = 30x + 50y c'est l'objectif à atteindre.

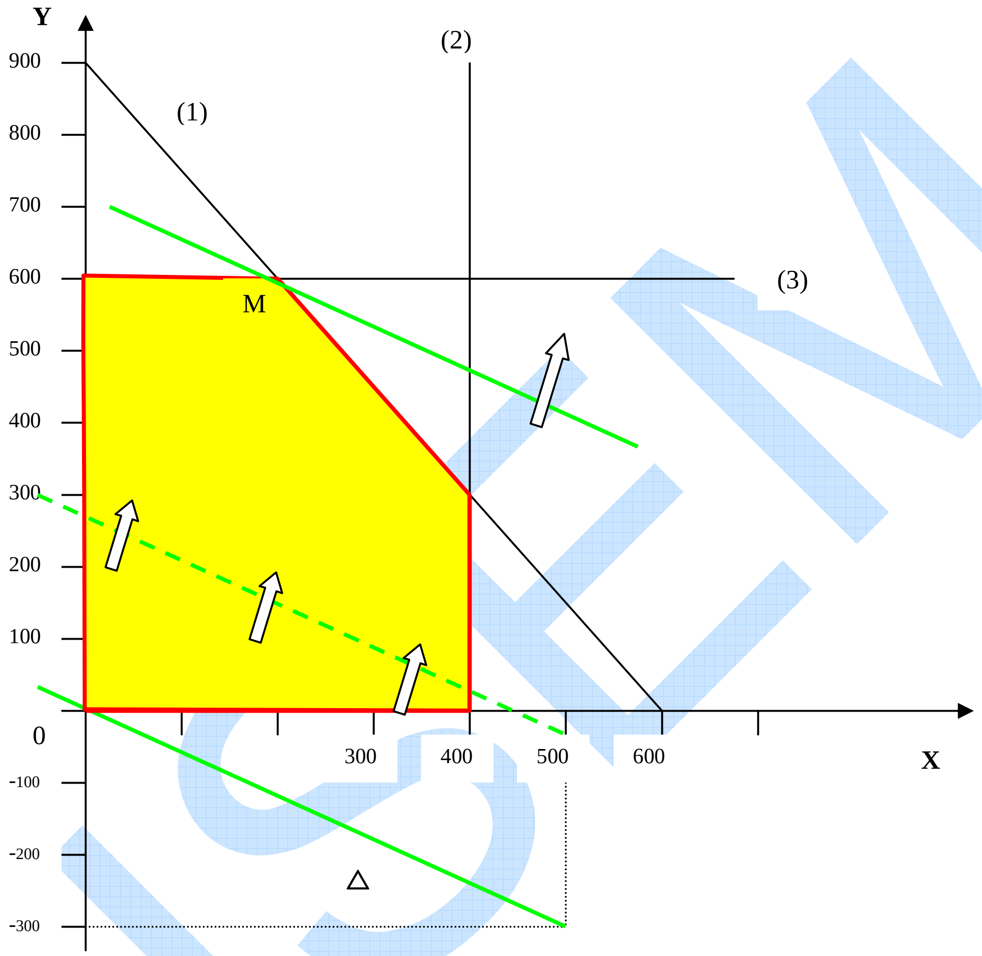
La représentation graphique est la suivante:

(1) : $3x + 2y \leq 1\,800$

(2) : $x \leq 400$

(3) : $y \leq 600$

Δ : $y = -30 / 50\,x$



Le champ des possibles (en jaune) est délimité par les droites passant par les points (0 ; 0), (400 ; 0), (400 ; 300), (200 ; 600) et (0 ; 600)

La fonction MAX est représentée par la droite verte (Δ) permettant de rechercher par translation parallèle le point le plus éloigné du champ des possibles. Le point le plus éloigné de cette droite dans le champ des possibles est le point M (200 ; 600).

Donc pour atteindre l'optimum, les quantités à produire sont : x = 200, y = 600.

La marge maximum sera de (30 x 200) + (50 x 600) = 36 000 €

Nous observons que la contrainte commerciale du produit X n'est pas saturée, nous aurions pu vendre 200 unités de plus ; la contrainte commerciale du produit Y est saturée, le marché était limité à 600 unités. De même, la contrainte technique concernant la capacité productive est saturée (3 x 200) + (2 x 600) = 1 800. Les contraintes logiques sont respectées, à savoir $x \geq 0$ et $y \geq 0$.