ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Applications des mathématiques:

La ventilation d'un tunnel routier

Mathématiques Appliquées et Génie Industriel

Résumé

La concentration de gaz dans un tunnel dépend de la puissance du système de ventilation et du nombre de véhicules qui le traversent. On construit un modèle probabiliste pour le facteur de dilution qui s'avère être une fonction d'une variable aléatoire exponentielle.

Domaines du génie

Civil, Mécanique

Notions mathématiques

Fonction de répartition, Fonction de densité, Fonction d'une variable aléatoire

Cours pertinents

Probabilités et Statistiques

Auteur(es)

N.Khattabi

Sommaire

1 Introduction

Figure 1: Un tunnel routier.

Montréal possède environ 10 km de voies rapides sous forme de tunnels. Afin de permettre une circulation en toute sécurité, ce réseau de tunnels est équipé de plusieurs systèmes, dont des feux de circulation, des stations de pompage, des génératrices de secours et des systèmes de ventilation mécanique (SVM).

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux systèmes de ventilation mécanique. Ceux-ci assurent des conditions de température et d'humidité convenables pour les usagers des tunnels, mais surtout ils permettent d'évacuer les gaz toxiques tel que le monoxyde de carbone.

Dans un cas plus critique, lors d'un incendie, l'importance de ces systèmes devient accrue car la fumée représente non seulement un danger pour les usagers mais aussi un danger pour les pompiers et un frein aux secours comme lors de l'incendie qui a lieu dans le tunnel du Mont-Blanc le 24 mars 1999.

Nous allons ici traiter le cas de la ventilation normale durant la circulation des véhicules afin d'évacuer la fumée dégagée par chaque véhicule. On voudrait trouver un modèle pour le facteur de dilution, un paramètre très important pour la conception du système de ventilation.

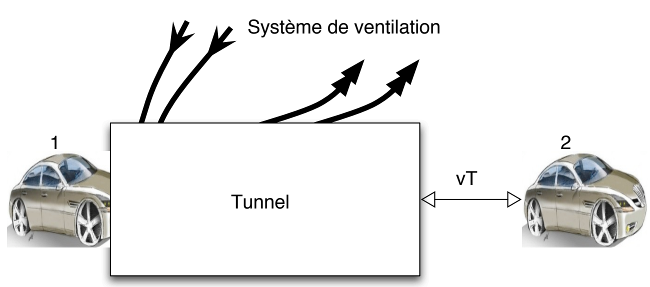
2 Modélisation

Le modèle réel est très complexe car de nombreux paramètres peuvent entrer en ligne de compte comme le nombre de véhicules qui passent par le tunnel, la vitesse de chaque véhicule, etc. Cependant, certaines hypothèses peuvent simplifier le modèle tout en restant réaliste.

Pour des fins de simplification du modèle, on pose les hypothèses suivantes :

- Un seul véhicule à la fois passe dans le tunnel ;
- Le temps T entre la sortie du véhicule 1 et l'entrée du véhicule 2 est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ;
- Les véhicules ont tous la même vitesse v ;

La figure ci-dessous illustre ces hypothèses.



Lorsqu'un véhicule traverse le tunnel, il y dégage une quantité de gaz d'échappement x, la concentration de fumée dans le tunnel est alors : $d = kx$ où k est une constante de proportionnalité.

Le ventilateur fonctionne de façon à réduire exponentiellement en fonction du temps cette concentration : Le ventilateur réduit un pourcentage fixe des gaz par minute. Si on prend q tel que $e^{-q} \in [0,1]$ est le pourcentage de gaz restant après une seconde alors, au temps T, il ne restera dans le tunnel qu'une fraction $(e^{-q})^T = e^{-qT}$ de gaz. Si $d(0)$ est la quantité de gaz laissé par véhicule 1. Alors, au moment d'arrivée du véhicule 2, la concentration de gaz serait $d(T) = d(0)\, e^{-qT}$.

On définit le facteur de dilution comme $Y = e^{-qT}$ une variable aléatoire qui est fonction de T, qui est aussi une variable aléatoire.

3 Résolution

Par définition, la fonction de répartition de Y s'écrit comme suit :

$$F_Y(y) = P[Y \leq y].$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[e^{-qT} \leq y] \\ &= P\left[T \leq \frac{\ln(y)}{-q}\right] \\ &= F_T\left(\frac{\ln(y)}{-q}\right). \end{aligned}$$

On remarque que la fonction de répartition de Y est la fonction de répartition de T évaluée en $\frac{\ln(y)}{-q}$. Toutefois on connaît la fonction de densité de la variable T :

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}(F_T(t)) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

De là, en dérivant F_Y, on trouve la fonction de densité de la variable aléatoire Y :

$$\begin{aligned} f_Y(y) \quad &= f_T\left(\frac{\ln(y)}{-q}\right) \left| \frac{d\left(\frac{\ln(y)}{-q}\right)}{dy} \right| \\ &= \lambda\, e^{-\lambda \frac{\ln(y)}{-q}} \left| \frac{d}{dy}\left(\frac{\ln(y)}{-q}\right) \right| \\ &= \lambda\, e^{\lambda \frac{\ln(y)}{q}} \left| \frac{1}{-q\,y} \right| \\ &= \lambda\, (e^{\ln(y)})^{\frac{\lambda}{q}} \left| \frac{1}{-q\,y} \right| \\ &= \lambda\, y^{\frac{\lambda}{q}} \left| \frac{1}{-q\,y} \right| \\ &= \frac{\lambda}{q}\, y^{(\frac{\lambda}{q}-1)}. \end{aligned}$$

4 Interprétation des résultats

On voit donc que certaines quantités utiles ne peuvent être modélisées en utilisant des lois déjà connues. Par contre, on peut les écrire comme fonction de lois connues.

Remarquons que ce modèle simple pourrait être amélioré pour traiter :

– un nombre multiple de véhicules dans le tunnel.
– des vitesses aléatoires.

5 Conclusion

Après avoir établi les hypothèses, on a trouvé un modèle simple qui pourrait être une piste pour un modèle réaliste considérant plusieurs paramètres réels.

Références

[1] Gestion de la fumée dans l'environnement construit. [En ligne] http ://irc.nrc-cnrc.gc.ca/fr/smbe/smoketunnels_f.html. Page consultée le 20 mai 2009.

[2] Figure 1. [En ligne] http ://www.virtualtourist.com/travel/North_America/Canada/Province_of_Quebec/Montreal-906413/Transportation-Montreal-CarAuto-BR-3.html. Page consultée le 20 mai 2009.

[3] Catastrophe du tunnel du Mont Blanc Source : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Incendie_du_tunnel_du_Mont-Blanc. Page consultée le 11 juin 2009.

[4] BOULEAU, Nicolas. *Probabilités de l'ingénieur : variables aléatoire et simulation*. Paris : Hermann, c2002. BIBLIO POLY : QA 273 B68 2002