1.2 Corrigés

1. **Axiomes.** Soit $0' \in \mathbb{K}$ un autre élément tel que $0' + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, en particulier, $0' + 0 = 0$. D'autre part,$0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, en particulier, $0 + 0' = 0'$. L'addition est commutative, i.e. $0' + 0 = 0 + 0'$, donc $0' = 0$. q.e.d.

2. **Axiomes.** Notons d'abord les axiomes algébriques. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   A1 $x + (y + z) = (x + y) + z$ et $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

   A2 $x + y = y + x$ et $x \cdot y = y \cdot x$.

   A3 Il existe un élément noté 0 tel que pour tout $x : 0 + x = x$.

   A4 Pour chaque x il existe un élément noté $-x$ tel que $x + (-x) = 0$.

   A5 Il existe $1 \neq 0$ tel que pour tout $x : 1 \cdot x = x$.

   A6 Pour chaque $x \neq 0$ il existe un élément noté x^{-1} tel que $x \cdot x^{-1} = 1$.

   A7 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

   Montrons $0 \cdot x = 0$ (entre parenthèses l'axiome appliqué) :

$$
\begin{aligned}
0 \cdot x &= 0 + 0 \cdot x && (A3)\\
&= (x + (-x)) + 0 \cdot x && (A4)\\
&= (-x + x) + 0 \cdot x && (A2)\\
&= -x + (x + 0 \cdot x) && (A1)\\
&= -x + (1 \cdot x + 0 \cdot x) && (A5)\\
&= -x + (x \cdot 0 + x \cdot 1) && (A2)\\
&= -x + (x \cdot (0 + 1)) && (A7)\\
&= -x + (x \cdot 1) && (A3)\\
&= -x + (1 \cdot x) && (A2)\\
&= -x + x && (A5)\\
&= x + (-x) && (A2)\\
&= 0 && (A4)
\end{aligned}
$$

   Remarque : Les étappes (A2) peuvent être supprimées en appliquant directement la loi commutative dans les autres axiomes.

   Donc brièvement (exercice : noter les étappes comme ci-dessus)

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

   i.e. $-x = (-1) \cdot x$ et

   $1 = 1{+}0 = 1{+}0{\cdot}(-1) = 1{+}(1{+}(-1)){\cdot}(-1) = 1{+}(-1){+}(-1){\cdot}(-1) = (-1){\cdot}(-1)$.

3. **Axiomes.** Si $x > 0$, alors $x^2 \geq 0$ est donc $x^2 > 0$. Le cas $x^2 = 0$ est exclu, car sinon on a $x = 1 \cdot x = (x^{-1} \cdot x) \cdot x = x^{-1}(\cdot x \cdot x) = (x^{-1} \cdot 0 = 0$ par l'exercice 2, d'où contradiction. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et

$$0 < (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$$

en utilisant le résultat de l'exercice 2. q.e.d.

4. **La progression géométrique.** La relation est également démontrée dans le resumé du cours avec $x = a$ et $y = b$: Appelons cette relation $R(n)$. Pour $n = 1$ nous avons $a^n - b^n = a - b$ et

$$(a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{0} a^{1-k-1} b^k = (a - b) \cdot a^0 b^0 = a - b$$

Par conséquent, $R(1)$ est vrai. Pour démontrer que $R(n)$ implique $R(n+1)$ nous écrivons $a^{n+1} - b^{n+1}$ comme suit :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + (a - b)b^n$$

Nous utilisons ensuite la relation $R(n)$. Donc

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a \cdot (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k + (a - b)b^n \\ &= (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n+1-k-1} b^k + (a - b)b^n \end{aligned}$$

Notant que $b^n = \sum_{k=n}^{n} a^{n+1-k-1} b^k$ nous obtenons la relation $R(n + 1)$:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \cdot \big(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n+1-k-1} b^k + \sum_{k=n}^{n} a^{n+1-k-1} b^k \big) \\ = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n+1-1} a^{n+1-k-1} b^k. \end{aligned}$$

i.e. le resultat.

Posons ensuite $x = 1$ et $y = a$ et remplaçcons n par $n+1$. Alors la relation s'écrit comme suit :

$$1^{n+1} - a^{n+1} = (1 - a) \cdot \sum_{k=0}^{n+1-1} 1^{n+1-k-1} a^k$$

i.e.

$$1 - a^{n+1} = (1 - a) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k$$

pour tout a. Pour obtenir l'affirmation on doit diviser les deux membres de cette relation par $1 - a$. Donc il faut supposer que $a \neq 1$.

5. Par l'exercice 4 nous avons

$$2000^{2000} - 1 = 1999 \cdot \sum_{k=0}^{1999} 2000^k.$$

La somme est une somme des nombres naturels et par conséquent $2000^{2000} - 1$ est divisible par 1999.

6. **Inégalité de Young.** Avec la progression géométrique (voir l'exercice 4) on a :

$$\begin{aligned} b(b^n - a^n) - na^n(b-a) &= (b-a) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k}a^k - na^n \right) \\ &= (b-a)a^n \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^{n-k}}{a^{n-k}} - n \right) \\ &= (b-a)a^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b^{n-k}}{a^{n-k}} - 1 \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

puisque les deux facteurs ont toujours le même signe. En evaluant les produits cette inégalité signifie que

$$b^{n+1} + na^{n+1} - (n+1)a^n b \geq 0.$$

En posant $a = y^{1/n}$ et $b = x$ nous obtenons l'inégalité de Young.

7. **Une progression arithmétique.** Nous donnons deux démonstrations :

Démonstration 1 - par récurrence. Pour $n = 1$ la relation est vraie. Si la relation est vraie pour un n donné elle est aussi vraie pour $n + 1$ car

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Démonstration 2 - par changement d'indice. Soient $a_k \in \mathbb{R}$ et $k = 1, ..., n$. Le changement d'indice $j = n + 1 - k$ dans la somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

donne

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}.$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{n+1-k}) \right).$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1)\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. **La somme de carrés d'entiers.** Pour $n = 1$ la relation est vraie. Si la relation est vraie pour un n donné elle est aussi vraie pour $n+1$ car

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1}{6}.$$

Ensuite, en utilisant

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

on a pour tout n

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)(3k+2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{5n(n+1)}{2} + 2(n+1) = (n+1)^2(n+2).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2) = 1004005002.$$

9. **La somme alternée de carrés d'entiers.** La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$. On doit montrer que ceci implique qu'elle est vraie pour $n+1$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}k^2 + (n+1)^2 \\
&= (-1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \quad \text{par l'hypothèse que c'est vrai pour } n \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

10. **Une inégalité pour le factoriel.** L'inégalité est vraie pour $n = 4$ ($24 > 16$). Supposons donc qu'elle soit vraie pour un $n \geq 4$. Alors :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > 2 \cdot n! > 2^{n+1}.$$

Donc $n_0 = 3$.

11. **La somme de cubes d'entiers.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1-k)^3 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (n+1)^3 - 3(n+1)^2 k + 3(n+1)k^2 \\
&= \frac{1}{2} \big((n+1)^3 n - \frac{3}{2}(n+1)^3 n + \frac{1}{2}(n+1)^2(2n+1)n \big) \\
&= \frac{(n+1)^2 n^2}{4}
\end{aligned}$$

12. **La formule de binôme de Newton.** Evidemment

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k} + \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

On démontre la *formule de binôme de Newton* par récurrence. Elle est vraie pour $n = 0$ (ou $n = 1$). Ensuite

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x(x+y)^n + y(x+y)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} x^l y^{n+1-l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

par le changement d'indice $k + 1 = l$. Combiner ensuite les deux sommes pour montrer le résultat.

(a) Choisir $x = y = 1$.

(b) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $n > 1$ et trois entiers naturels a, b, c vérifiant $0 < a \leq b < n$ et $a^n + b^n = c^n$. Alors, $c > b$ car $c^n > b^n$. Donc $c \geq b+1$ (b, c sont des entiers). Par la formule de binôme de Newton nous avons (on estime la somme - qui a au moins trois membres car $n > 1$ - par les deux derniers membres, c'est pourquoi on a l'inégalité stricte)

$$c^n \geq (b+1)^n > b^n + nb^{n-1}$$

et par l'hypothèse $b < n$ que

$$c^n = a^n + b^n \leq b^n + b^n < b^n + nb^{n-1}.$$

D'où contradiction.

13. **Sommes téléscopiques I.** La relation est vraie pour $n = 0$. Pour conclure noter que

$$f(n+2)-f(0) = f(n+2)-f(n+1)+\sum_{k=0}^{n}\big(f(k+1)-f(k)\big) = \sum_{k=0}^{n+1}\big(f(k+1)-f(k)\big).$$

(a) En posant $f(n) = a^n$ pour un $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ on a

$$\begin{aligned} a^{n+1} - 1 &= \sum_{k=0}^{n}\left(a^{k+1} - a^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(a-1)a^k \\ &= (a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k \end{aligned}$$

d'où la formule désirée.

(b) Avec $f(n) = n^2$ nous obtenons

$$\begin{aligned} (n+1)^2 - 0 &= \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^2 - k^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) \\ &= (n+1) + 2\sum_{k=0}^{n} k \end{aligned}$$

d'où la formule désirée de l'exercice 7. Noter que par la deuxième équation la somme de n premiers nombres impair est toujours un carré parfait.

(c) Si $a = 1$ c'est une progression arithmétique de l'exercice 7. En posant $f(n) = na^n$ pour un $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ on a

$$\begin{aligned} (n+1)a^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)a^{k+1} - ka^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}(a-1)ka^k \\ &= a\sum_{k=0}^{n} a^k + (a-1)\sum_{k=0}^{n} ka^k \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{na^{n+2} - (n+1)a^{n+1} + a}{(a-1)^2}.$$

14. **Sommes téléscopiques II.** Pour $x = 0$ la somme vaut $n+1$. Donc nous supposons $x \neq 0$. Par l'exercice 13 et en utilisant l'identité

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\sin((n+1+a)x) - \sin(ax) &= \sum_{k=0}^{n} \sin((k+1+a)x) - \sin((k+a)x)\\ &= 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{(2k+1+2a)x}{2}.\end{aligned}$$

En posant $a = -\frac{1}{2}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos kx &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(-\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}\\ &= \frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

15. **L'inégalité de Bernoulli.** Nous donnons trois démonstrations :

Corrigé 1 - par formule de binôme de Newton. Par la formule de binôme de Newton on a pour tout $x \geq 0$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}x^k = 1+nx$$

Corrigé 2 - par récurrence. Evidemment pour $n = 1$ l'inégalité de Bernoulli est vraie. Supposons alors que

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Alors, pour tout $x \geq 0$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Noter que cette démonstration montre que l'inégalité de Bernoulli est même vraie sous l'hypothèse plus faible $x > -1$ (au lieu de seulement $x \geq 0$).

Corrigé 3 - par progression géométrique. Par l'exercice 4 nous trouvons en posant $a = 1+x$ pour tout $n \geq 0$ et tout $x \geq 0$ que

$$(1+x)^n - 1 = (1+x-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(1+x)^k \geq x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}1^k = nx.$$

16. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz I.** Nous avons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k y_k x_l y_l \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2}x_k^2 y_l^2 + \frac{1}{2}x_l^2 y_k^2 - \frac{1}{2}(x_k y_l - x_l y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(x_k y_l - x_l y_k)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.\end{aligned}$$

17. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz II *.** Pour $n = 1$ nous avons

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = x_1^2 y_1^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour $n = 1$. Supposons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un n donné, alors

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k\right)^2 &= \left(x_{n+1}y_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + 2x_{n+1}y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ nous donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

et

$$\begin{aligned}2x_{n+1}y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &\leq 2|x_{n+1}y_{n+1}|\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \\ &\leq x_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + y_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2\end{aligned}$$

en utilisant également le fait que $2ab \leq a^2 + b^2$ pour tout couple des réels a, b. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k\right)^2 &\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + x_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + y_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 \sum_{k=1}^{n+1} y_k^2.\end{aligned}$$

q.e.d.

18. **L'inégalité des moyens géométriques et arithmétiques I *.** On démontre l'inégalité par récurrence. Pour $n = 1$ on a $x_1 = 1$ et l'inégalité est vraie. Supposons maitenant cette inégalité est vraie pour un n et toutes les $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ dont le produit vaut 1. Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ dont le produit vaut 1. On peut supposer que les x_k sont ordonnés i.e.

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1}.$$

En particulier, $x_1 \leq 1$ et $x_{n+1} \geq 1$ (sinon le produit ne peut pas être égale à 1. On pose $y_k = x_k$ si $2 \leq k \leq n$ et $y_1 = x_1 x_{n+1}$. Alors, le produit des y_k vaut 1 et par l'hypothèse

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{n} y_k - n &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_1 x_{n+1} - x_1 - x_{n+1} - n \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k + (1 - x_1)(1 - x_{n+1}) - (n+1) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} x_k - (n+1) \end{aligned}$$

car $(1 - x_1)(1 - x_{n+1}) \leq 0$.

19. **L'inégalité des moyens géométriques et arithmétiques II*.**

Corrigé 1. Notons G_n la moyenne géométrique et A_n la moyenne arithmétique de $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$. Soit

$$x_k = \frac{a_k}{G_n} > 0 \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n.$$

Evidemment

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \frac{G_n}{G_n} = 1.$$

Par l'exercice precedent

$$1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{A_n}{G_n}.$$

q.e.d.

Corrigé 2 - par récurrence. Pour $k = 1, \ldots, n+1$ notons G_k la moyenne géométrique et A_k la moyenne arithmétique de $a_1 > 0, \ldots, a_k > 0$. L'inégalité est vraie pour $n = 1$ car $G_1 = a_1 = A_1$. Sous l'hypothèse qu'elle soit vrai pour n nous avons

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{nA_n}{n+1} \geq \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{nG_n}{n+1}.$$

en appliquant négalité de Young (voir l'exercice 6) nous obtenons

$$A_{n+1} \geq a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \cdot G_n^{\frac{n}{n+1}} = G_{n+1}.$$

20. **Un produit fini.** La relation est vraie pour $n = 1$. Si la relation est vraie pour un n donné elle est aussi vraie pour $n+1$ car

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

21. **Nombres rationnels et irrationels***

Corrigé (a). Soient $a, b,\ a < b$ deus nombres irrationnels. Par l'axiome d'Archimède (voir cours) il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(b-a) > 1$. Par conséquent, pour tout $m \geq n$ on a

$$m(b-a) > 1 \quad \text{ou} \quad b > \frac{ma+1}{m}.$$

On a une infinité de rationnels r_m définis par

$$r_m = \frac{[ma+1]}{m}$$

satisfaisants

$$b > \frac{ma+1}{m} \geq \frac{[ma+1]}{m} = r_m = \frac{[ma]+1}{m} > \frac{ma}{m} = a.$$

Corrigé (b). Soient $a, b,\ a < b$ deus nombres rationnels. On construit explicitement une infinité d'irrationnels entre a et b. On sait que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$. Par conséquent

$$0 < \frac{\sqrt{2}-1}{n} < 1$$

pour tout entier positif n. Les nombres x_n définies par

$$x_n = a + (b-a)\frac{\sqrt{2}-1}{n}$$

sont des nombres irrationnels (car a et b sont des rationnels) entre a et b.

22. **Nombres complexes.**

$$\text{Re}\left(\frac{z^2}{z-i}\right) = \frac{x(x^2+y^2-2y)}{x^2+y^2-2y+1}$$

et

$$\text{Im}\left(\frac{z^2}{z-i}\right) = \frac{x^2y+x^2+y^3-y^2}{x^2+y^2-2y+1}.$$

23. **Nombres complexes.**
$$\mathrm{Re}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{(r^2-1)\cos\theta}{r}$$
et
$$\mathrm{Im}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)=\frac{(r^2+1)\sin\theta}{r}.$$

24. **Nombres complexes.** Pour $z=e^{i\theta}$ et tout entier $n\geq 1$ en utilisant les rélations $\cos-\theta=\cos\theta$ et $\sin-\theta=-\sin\theta$:
$$z^n-\frac{1}{z^n}=e^{in\theta}-e^{-in\theta}=2i\sin n\theta$$
et
$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta.$$

25. **Nombres complexes.** Soit $z=1-i$, alors $\overline{z}=1-i$, $|z|=\sqrt{2}, \arg z=\frac{-\pi}{4}$ et $z^{-1}=\frac{1+i}{2}$.

26. **Nombres complexes.**
$$\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^{19}=\big(e^{i\frac{\pi}{6}}\big)^{19}=-\frac{i+\sqrt{3}}{2}.$$

27. **Sommes trigonométriques.** Rappelons que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $z\neq 1$ nous avons
$$\sum_{k=0}^{n} z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$
Par conséquent, pour tout $\theta\neq 0$
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$
Si $\theta=0$ la somme vaut $n+1$. Pour donner ensuite les sommes
$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\mathrm{Im}\big(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\big)\text{ et }\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\big)=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$$
on peut transformer comme suit : L'astuce consiste en écrire le terme
$$e^{ix}-1=e^{ix/2}\big(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\big)=2ie^{ix/2}\sin x/2.$$
Donc, pour tout $theta\neq 0$:
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}=\frac{e^{in\theta/2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

et par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

28. **Équations de degré 2.**
    (a) Résoudre $z^2+z+1=0$: $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
    (b) Résoudre $z^2+2z+5=0$: $z_1 = -1+2i, z_2 = -1-2i$.
    (c) Résoudre $4z^2+2z+1=0$: $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{4}$.
    (d) Résoudre $z^2-2iz-3=0$: $z_1 = i+\sqrt{2}, z_2 = i-\sqrt{2}$.
    (e) Résoudre $(1+i)z^2+(-1+7i)z-(10-2i)=0$: $z_1=-2i, z_2=-3-2i$.

29. **Équations de degré 3.**
    (a) Résoudre $z^3-4z^2+6z-4=0$: $z_1=2, z_2=1+i, z_3=1-i$.
    (b) Résoudre $2z^3+14z^2+41z+68=0$: $z^3-4z^2+6z-4=0$: $z_1=-4, z_2=\frac{-3+5i}{2}, z_3=\frac{-3-5i}{2}$.

30. **Équations algébriques.**
    (a) Résoudre $z^6+i=0$: $z_k = \cos(\pi\frac{1+4k}{12})+i\sin(\pi\frac{1+4k}{12})$, $k=0,1,2,3,4,5$.
    (b) $z^4-2z^3-z^2+2z+10=0$: $z_1=2+i$, $z_2=2-i$, $z_3=-1+i$, $z_4=-1-i$.
    (c) $z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})z-i=0$: $z_1=i$, $z_2=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_3=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$.
    (d) Résoudre $z^4+3z^2+1=0$: $z_1=\frac{i(\sqrt{5}-1)}{2}$, $z_2=-\frac{i(\sqrt{5}-1)}{2}$, $z_3=\frac{i(\sqrt{5}+1)}{2}$, $z_4=-\frac{i(\sqrt{5}+1)}{2}$.
    (e) Résoudre $z^4+1=0$: $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

31. **Point fixe d'une application.** L'application $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$ a deux points fixes :
$$p_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i), \quad p_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i).$$

32. **Équations d'un cercle dans le plan complexe.** L'équation de S est $|z-z_0|^2 = r^2|z|^2$ qui est équivalente à
$$\left|z - \frac{z_0}{1-r^2}\right| = \left|\frac{rz_0}{1-r^2}\right|.$$
C'est un cercle autour du centre $\frac{z_0}{1-r^2}$ de rayon $\left|\frac{rz_0}{1-r^2}\right|$.

33. **Image d'un cercle sous une application affine.** On pose $w = f(z)$ et on résoud pour z, i.e. $z = f^{-1}(w)$. On insert cette identité dans l'équation de S. Donc

$$f[S] = \{w \in \mathbb{C} : |f^{-1}(w) - (1+2i)| = 1\} = \{w \in \mathbb{C} : |w - 12i| = \sqrt{13}\}.$$

L'image de S est le cercle du rayon $\sqrt{13}$ autour du point $12i$.

34. **Image d'un cercle sous l'application $\mathbf{f(z) = \frac{1}{z}}$.*** Si $z_0 = 0$ la proposition est evidente. Soit $z_0 \neq 0$. Alors

$$f[S_R(z_0)] = \{w \in \mathbb{C} : |\frac{1}{w} - z_0| = R\} = \{w \in \mathbb{C} : |w - \frac{1}{z_0}| = \frac{R}{|z_0|}w\}$$

Par l'exercice 32 c'est un cercle autour du centre $\frac{1}{z_0(1-r^2)}$ de rayon $\frac{r}{|z_0(1-r^2)|}$ avec $r = \frac{R}{|z_0|}$ (noter qu'en effet $r \neq$) et $r \neq 1$) donc la proposition.
Les cercles identiques à leurs images sous f, i.e. $f[S_R(z_0)] = S_R(z_0)$, vérifient les deux conditions

$$\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2} = z_0 \quad \text{invariance du centre}$$

$$\frac{R}{|R^2 - |z_0|^2|} = R \quad \text{invariance du rayon.}$$

la premièe équation donne $z_0 \in \mathbb{R}$ et si $z_0 \neq 0$, alors $|z_0|^2 - R^2 = 1$, donc $|z_0| > 1$. Cette dernière condition est compatible avec l'invariance du rayon. Si $z_0 = 0$, alors $R = 1$. Par conséquent, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| > 1$, le cercle

$$S_{\sqrt{z_0^2-1}}(z_0)$$

correspond á son image sous l'application $f(z) = \frac{1}{z}$. De plus le cercle $S_1(0)$ est invariant sous $f(z) = \frac{1}{z}$.