Chapitre 4

Fonctions réelles

4.1 Exercices

1. **Propriétés générales des fonctions.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 25}$$
Trouver l'image $f[\mathbb{R}]$ ($\text{Im}(f)$). La fonction f est-elle injective ?
2. **Calcul des fonctions réciproques.** Montrer que la fonction $f :]-1, 0[\to]0, 1[$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est bijective. Calculer sa fonction rèciproque f^{-1}.
3. **Calcul des fonctions réciproques.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ définie par
$$f(x) = \frac{\exp(x) + 2}{\exp(-x)} = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$
est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.
4. **Calcul des fonctions réciproques.** Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par
$$f(x) = \frac{2\exp(2x)}{1 + \exp(x)} = \frac{2e^{2x}}{1 + e^x}$$
est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.
5. **Calcul des fonctions réciproques.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par
$$f(x) = [x] + (x - [x])^2 \quad \text{et} \quad g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$
Montrer que $g = f^{-1}$.
6. **Propriétés générales des fonctions.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire. Montrer que sa fonction rèciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi impaire.

7. **Calcul des fonctions composées.** Pour les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
et
$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 3, \\ x & \text{si } x < 3, \end{cases}$$
calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.
8. **Fonctions composées.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions décroissante. Montrer que la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.
9. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$:
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$
10. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$
11. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$
12. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$
13. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:
$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$
14. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ les séries
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
sont absolument convergentes. De plus, montrer que
$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
15. **Fonctions spéciales.** Pour $x \in \mathbb{R}$ calculer
$$\sinh x + i \sin(ix),\ \cosh x - \cos(ix),\ \sinh(x + i\frac{\pi}{2}),\ \cosh(x + i\frac{\pi}{2})$$

16. **Fonctions spéciales.** Soit $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\cosh(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

17. **Fonctions des ensembles I.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ et χ_A sa fonction d'indicatrice (voir cours). On note $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ le complementaire de A. Vérifier que
$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$
Soient $A, B \subset \mathbb{R}$. Vérifier que
$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = \chi_{A \cap B}(x)$$
et
$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A \cup B}(x) + \chi_{A \cap B}(x).$$
Conclure que
$$\big(1 - \chi_A(x)\big)\big(1 - \chi_B(x)\big) = 1 - \chi_{A \cup B}(x).$$
Interpreter cette identité.

18. **Fonctions des ensembles II - principe d'exclusion-inclusion.** Soient $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que
$$1 - \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \chi_{A_k}(x)\big)$$

19. **Limite d'une fonction.** Montrer à l'aide de la définition de la limite que
$$\lim_{x \to 2} \big(4x + 5\big) = 13.$$

20. **Limite d'une fonction.** Montrer à l'aide de la définition de la limite que
$$\lim_{x \to -3} \big(|x| - x^3\big) = 30.$$

21. **Limite d'une fonction.** Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 + 3x}{6x}$$

22. **Limite d'une fonction.** Soit $n \in \mathbb{Z}_+$. Calculer
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

23. **Limite d'une fonction.** Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z}_+$. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + \alpha)^n - \alpha^n}{x}.$$

24. **Limite d'une fonction.** Calculer
$$\lim_{x \to 2+} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

25. **Limite d'une fonction.** Montrer que la fonction $\sqrt{x}$ est strictement croissante pour $x \geq 0$. Ensuite montrer à l'aide de la définition de la limite à droite que

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0.$$

26. **Calcul des limites.** Calculer

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x},$$

(b)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1},$$

(c)
$$\lim_{x \to +\infty} x\big(\sqrt{x^2+1}-x\big),$$

(d)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \arctan x,$$

(e)
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}},$$

(f)
$$\lim_{x \to 2+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}},$$

(g)
$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{\big(1+\frac{2}{x}\big)\big(1+\frac{3}{x}\big)}-1\right),$$

(h)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}},$$

(i)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2},$$

(j)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4-x^3+x^2-x}{x^2-1},$$

(k)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^3+x},$$

(l)
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right),$$

(m)
$$\lim_{x\to 0}[x],$$

(n)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{1+[x]},$$

(o)
$$\lim_{x\to 0} x\frac{1}{[x]},$$

(p)
$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi},$$

(q)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x},$$

(r)
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x},$$

(s)
$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x},$$

(t)
$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},$$

(u)
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

(v)
$$\lim_{x\to +\infty} x^5 e^{-x^2},$$

(w)
$$\lim_{x\to +\infty} x^2 5^{-x}.$$

27. **Limites des fonctions.**

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donneé par $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Soit $f(x) = e^x(x+\cos x)$. Donner
$$\lim_{n\to +\infty} f(x_n).$$

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donneé par $x_n = (1+\frac{2}{n})^n$. Soit $f(x) = \ln x)$. Donner
$$\lim_{n\to +\infty} f(x_n).$$

(c) Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite donneé par $a_k = e^{-k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Pour $f(x) = \ln x^2 - \ln(x-1)^2$ donner
$$\lim_{n\to +\infty} f(S_n).$$

28. **Prolongement par continuité.**
    (a) Existe-t-il une prolongement par continuité de la fonction $f(x)$ définie par
    $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}?$$
    (b) Existe-t-il une prolongement par continuité de la fonction $g\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
    $$g(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}?$$
29. **Fonctions continues.**
    (a) Soit $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ définie par $f(x) = x^x$. Montrer que f est une fonction continue et calculer
    $$\lim_{x \to 0_+} f(x).$$
    (b) Montrer que la fonction $g :]0, \infty[\to]0, \infty[$ définie par
    $$g(x) = \frac{(x - [x])([x] + 1 - x)}{x}$$
    est continue et calculer
    $$\lim_{x \to 0_+} g(x).$$
    (c) Soit $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ définie par
    $$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$
    Calculer
    $$\lim_{x \to 0_+} f(x).$$
    (Idée : Montrer d'abord que $e^a \geq 1 + a$ pour tout $a \geq 0$ et en déduire une borne pour e^{-a} pour $a \geq 0$). En déduire que la fonction
    $$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$
    est une fonction continue.
30. **Prolongements, asymptotes.**
    (a) Soit $f\mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{R}$ définie par
    $$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 4x + 3}.$$
    Étudier la fonction chez $x = 1$ et $x = 3$ et donner le prolongement par continuité (s'il existe). Donner les asymptotes de f lorsque $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.
    (b) Donner les asymptotes obliques de $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - x$ en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) Donner les asymptotes obliques de $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} + |x|$ en $-\infty$ et $+\infty$.

(d) Donner les asymptotes de $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} + |x|$ en $-\infty$ et $+\infty$.

(e) Donner les asymptotes de $f(x) = x \tanh x + x$ en $-\infty$ et $+\infty$.

31. **Comportement asymptotique.** Trouver $h(x) = ax^2 + bx + c$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - h(x)) = 0.$$

32. **Propriétés des fonctions continues.*** Soit $c < a < b < d$ et $f : [a, b] \to [c, d]$ une fonction surjective et continue. Montrer que f possède au moins un point fixe.

4.2 Corrigés

1. **Propriétés générales des fonctions.** Pour trouver l'image de f il faut résoudre l'équation $y = f(x)$ en x pour y donné,i.e.

$$yx^2 - 2x + 25y = 0.$$

Si $y = 0$, alors $x = 0$. Pour $y \neq 0$ la discriminante de cette équation de degré 2 est donnée par $1 - 25y^2$. Donc elle admet deux solutions réelles si $1 - 25y^2 \geq 0$. Par conséquent $f[\mathbb{R}] = [-1/5, 1/5]$ et f n'est pas injective.

2. **Calcul des fonctions réciproques.** Pour tout $y \in]0, 1[$ l'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$ admet une unique solution x donnée par

$$x = -\sqrt{1 - y^2}, \quad \text{i.e.} \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{1 - y^2}$$

3. **Calcul des fonctions réciproques.** Noter que

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x = (e^x + 1)^2 - 1 > 0.$$

Pour tout $y > 0$ l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x donnée par

$$x = \ln\big(-1 + \sqrt{1 + y}\big), \quad \text{i.e.} \quad f^{-1}(y) = \ln\big(-1 + \sqrt{1 + y}\big).$$

4. **Calcul des fonctions réciproques.** En utilisant $exp(x) \geq 1$ si $x \geq 0$ Noter que

$$f(x) = \frac{2(e^x)^2}{1 + e^x} \geq \frac{2e^x}{1 + e^x} \geq \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 1.$$

Pour tout $y \geq 1$ l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x donnée par

$$x = \ln\big(\frac{y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}\big), \quad \text{i.e.} \quad f^{-1}(y) = \ln\big(\frac{y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}\big).$$

5. **Calcul des fonctions réciproques.** Rappel : $[x]$ dénote la partie entière de x et satisfait

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

ou $0 \leq x - [x] < 1$. Par conséquent,

$$0 \leq (x - [x])^2 < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sqrt{x - [x]} < 1$$

et donc $[f(x)] = [g(x)] = [x]$. Pour enfin montrer que $g = f^{-1}$ on doit montrer que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$. On a

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= [f(x)] + \sqrt{f(x) - [f(x)]} \\ &= [x] + \sqrt{[x] + (x - [x])^2 - [x]} \\ &= [x] + x - [x] = x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= [g(x)] + (g(x) - [g(x)])^2 \\ &= [x] + ([x] + \sqrt{x - [x]} - [x])^2 \\ &= [x] + x - [x] = x. \end{aligned}$$

6. **Propriétés générales des fonctions.** Soit $y \in \mathbb{R}$ et x tel que $x = f^{-1}(-y)$. Par conséquent,

$$y = -f(x) = f(-x)$$

ou $x = -f^{-1}(y)$,i.e. $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

7. **Calcul des fonctions composées.**

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 & \text{si } -\sqrt{3} < x < 0 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

car si $x \geq 0$, alors $f(x) = x + 3 \geq 3$ et $g(f(x)) = 2f(x) + 1$, et si $x \in]-\sqrt{3}, 0[$, alors $0 < f(x) < 3$ et $g(f(x)) = f(x)$, et si $x \leq -\sqrt{3}$, alors $f(x) = x^2 \geq 3$ et $g(f(x)) = 2f(x) + 1$.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \geq 3, \\ x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

car si $x \geq 3$, alors $g(x) = 2x+1 \geq 0$ et $f(g(x)) = g(x)+3$, et si $0 \leq x < 3$, alors $g(x) = x \geq 0$ et $f(g(x)) = g(x) + 3$, et si $x < 0$, alors $g(x) = x < 0$ et $f(g(x)) = g(x)^2$.

8. **Fonctions composées.** Soit $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ et $g(f(x_1) \leq g(f(x_2))$.

9. **Fonctions spéciales.** Noter d'abord que la fonction arcsin est strictement croissante et $\arcsin -1 = \frac{-\pi}{2}$ et $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, donc $Im(\text{arcsin}) = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. La fonction arccos est strictement décroissante et $\arccos -1 = \pi$ et $\arccos 1 = 0$, donc $Im(\text{arccos}) = [0, \pi]$. Par conséquent,

$$\frac{-\pi}{2} \leq \arcsin x + \arccos x \leq \frac{3\pi}{2}$$

et (noter aussi que $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ si $t \in [0,\pi]$ et $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ si $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x + \arccos x) &= \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \sin(\arccos x)\cos(\arcsin x)\\ &= x^2 + \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}\\ &= x^2 + 1 - x^2 = 1.\end{aligned}$$

L'unique solution de $\sin z = 1$ pour $z \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ est $z = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

10. **Fonctions spéciales.**

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1.$$

11. **Fonctions spéciales.**

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}}{4}\\ &+ \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4}\\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \sinh(x+y).\end{aligned}$$

Noter que

$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\\ &= \frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1) + (e^{2x}+1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1) + (e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}\\ &= \frac{2e^{2x+2y}-2}{2e^{2x+2y}+2}\\ &= \tanh(x+y)\end{aligned}$$

12. **Fonctions spéciales.** On doit résoudre l'équation

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

pour x. On obient alors l'éqaution de degré 2 en e^x suivante :

$$\left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

dont la racine positive est

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

13. **Fonctions spéciales.** On doit résoudre l'équation
$$y = \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
pour x. Par conséquent,
$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$
d'où le resultat.

14. **Fonctions spéciales.** Les deux séries sont absolument convergentes par le critère de d'Alembert et
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

15. **Fonctions spéciales.** Par définition
$$\sinh x + i\sin(ix) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} + i\frac{\exp(i \cdot ix) - \exp(-i \cdot ix)}{2i} = 0,$$
$$\cosh x - \cos(ix) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} - \frac{\exp(i \cdot ix) + \exp(-i \cdot ix)}{2} = 0,$$
$$\sinh(x + i\frac{\pi}{2}) = \frac{\exp(x + i\pi/2) - \exp(-x - i\pi/2)}{2} = i\cosh x$$
et
$$\sinh(x + i\frac{\pi}{2}) = \frac{\exp(x + i\pi/2) + \exp(-x - i\pi/2)}{2} = i\sinh x$$

16. **Fonctions spéciales.**
$$\begin{aligned}&\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\ &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2} + i\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2} \\ &= \frac{\exp(x+iy) + \exp(-x-iy)}{2} = \cosh(x+iy)\end{aligned}$$

17. **Fonctions des ensembles.** Les vérifications étaient présenté au cours. Le principe d'inculsion-exclusion
$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A\cup B}(x) + \chi_{A\cap B}(x).$$
s-écrit on utilisant $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x)$ comme suit :
$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A\cup B}(x) + \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$
ou
$$\big(1 - \chi_A(x)\big)\big(1 - \chi_B(x)\big) = 1 - \chi_{A\cup B}(x).$$
C'est la loi de de Morgan :
$$A^c \cap B^c = \big(A \cup B\big)^c.$$

18. **Fonctions des ensembles II - principe d'exclusion-inclusion.** L'identité est vraie pour $n = 1$ (evident) et $n = 2$ (par l'exercice precedent). La conclusion "$n \to n + 1$" : en utilisantl'identité pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned} 1 - \chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n\cup A_{n+1}}(x) &= \big(1 - \chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n}\big)\big(1 - \chi_{A_{n+1}}(x)\big) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\big(1 - \chi_{A_k}(x)\big)\big(1 - \chi_{A_{n+1}}(x)\big) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1}\big(1 - \chi_{A_k}(x)\big). \end{aligned}$$

19. **Limite d'une fonction.** Soit $\epsilon > 0$. On doit trouver $\delta > 0$ tel que

$$|(4x + 5) - 13| = 4|x - 2| < \epsilon$$

si $|x - 2| < \delta$. Un bon choix est alors $\delta = \epsilon/4$.

20. **Limite d'une fonction.** Soit $\epsilon > 0$. On doit trouver $\delta > 0$ tel que

$$\big||x| - x^3 - 30\big| < \epsilon$$

si $|x + 3| < \delta$. Noter que

$$\begin{aligned} \big||x| - x^3 - 30\big| &= \big||x| - 3 - (x^3 + 27)\big| \\ &\leq \big||x| - 3\big| + \big|x^3 + 27)\big| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &= \big||x| - 3\big| + |x + 3||x^2 - 3x + 9| \\ &\leq |x + 3|(1 + |x^2 - 3x + 9|) \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &= |x + 3|(1 + |(x + 3)^2 - 9x|) \\ &\leq |x + 3|(1 + (x + 3)^2 + 9|x|) \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Si $\delta < 1$ alors

$$\big||x| - x^3 - 30\big| \leq |x + 3|(1 + (x + 3)^2 + 9|x|) \leq 38|x + 3|$$

Si, de plus $\delta < \epsilon/38$, alors

$$\big||x| - x^3 - 30\big| < \epsilon$$

On choisit donc $\delta = \min\{1, \epsilon/38\}$.

21. **Limite d'une fonction.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 3x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2 + 3}{6} = \frac{1}{2}$$

22. **Limite d'une fonction.** Soit $n \in \mathbb{Z}_+$. Alors

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = n.$$

23. **Limite d'une fonction.** Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(x+\alpha)^n - \alpha^n}{x} &= \alpha^{n-1} \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{x}{\alpha}+1)^n - 1}{\frac{x}{\alpha}} \\ &= \alpha^{n-1} \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^n - 1}{y} \\ &= \alpha^{n-1} \lim_{z\to 1} \frac{z^n - 1}{z-1} = n\alpha^{n-1}\end{aligned}$$

24. **Limite d'une fonction.**

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

25. **Limite d'une fonction.** Pour tout $x, y > 0$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

et par conséquent, $\sqrt{x}$ est strictement croissante. Pour tout $\epsilon > 0$ on choisit $\delta = \epsilon^2$. Alors $0 < x < \epsilon^2$ implique par la monotonie de la fonction $\sqrt{x}$ que $0 < \sqrt{x} < \epsilon$. Donc

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0.$$

26. **Calcul des limites.**
    (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}$$
    (b)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = -\frac{1}{2}$$
    (c)
$$\lim_{x\to +\infty} x\big(\sqrt{x^2+1} - x\big) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\big(x^2+1-x^2\big)}{\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)} = \frac{1}{2}$$
    (d)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \arctan x = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$$
    (e)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$
    (f)
$$\lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$$
    (g)
$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{\big(1+\frac{2}{x}\big)\big(1+\frac{3}{x}\big)} - 1\right) = \frac{5}{2}$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$

(i)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^4-x^3+x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{x^3+x}{x+1} = 1$$

(j)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^3+x} = 2$$

(k)

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x\to1} \frac{-x-2}{x^2+x+1} = -1$$

(l)

$$\lim_{x\to0} [x]$$

n'existe pas car $[x] = 0$ si $x > 0$ et $[x] = -1$ si $x < 0$.

(m)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+[x]} = 1$$

(n)

$$\lim_{x\to0} x\frac{1}{[x]}$$

n'existe pas.

(o)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \lim_{h\to0} \frac{-\sin h}{h} = -1$$

(p)

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x\cos x} = 1$$

(q)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

(r)

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} \lim_{h\to0_+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

(s)

$$\lim_{x\to0} \cos\frac{1}{x}$$

n'existe pas (voir notes de cours).

(t)

$$\lim_{x\to0+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

(u)
$$\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2} = 0$$

(v)
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 5^{-x} = 0$$

27. **Limites des fonctions.**

(a) Noter que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. En utilisant la continuité de $f(x) = e^x(x+\cos x)$ on trouve
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(0) = 1.$$

(b) Par l'exercice 1 q) du ch. 2 la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^2. En utilisant la continuité de $f(x) = \ln x)$ pour $x > 0$ nous obtenons
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(e^2) = 2.$$

(c) La suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge vers $\frac{e}{e-1}$. Par la continuité de $f(x) = \ln x^2 - \ln(x-1)^2$ sur $]0,1[$:
$$\lim_{n\to+\infty} f(S_n) = 2.$$

28. **Prolongement par continuité.**

(a) Noter que
$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} 2x - 1 = 1.$$
$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} x^2 = 1.$$
On obtient le prolongement par continuité $\tilde{f}$ en posant $f(1) = 1$ ou
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}?$$

(b) Il n'y a pas de prolongement par continuité car
$$\lim_{x\to 0_-} g(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{x^2-x}{x} = -1.$$
$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^2+x}{x} = 1.$$

29. **Fonctions continues.**

(a) Noter que $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ est une composition des fonctions continues et donc continue. Ensuite en posant $y = \frac{1}{x}$ nous avons
$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^{\frac{1}{y}}} = 1$$
en appliquant l'exemple 6 du ch. 4.5.

(b) Montrer que la fonction $g :]0, \infty[\to]0, \infty[$ définie par

$$g(x) = \frac{(x - [x])([x] + 1 - x)}{x}$$

est continue : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]n, n + 1[$ nous avons

$$g(x) = \frac{(x - n)(n + 1 - x)}{x}.$$

Par conséquent, $g(x)$ est continue sur tout intervalle $x \in]n, n + 1[$. Pour tout n entier positif $g(n) = 0$ et

$$\lim_{x \to n_+} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to n_-} g(x) = 0,$$

d'où la continuité de g. Pour $x \in]0, 1[$ nous avons

$$g(x) = \frac{x(1 - x)}{x} = 1 - x,$$

donc

$$\lim_{x \to 0_+} g(x) = 1.$$

(c) L'inégalité $e^a \geq 1 + a$ pour tout $a \geq 0$ est une conséquence immédiate de la série exponentielle (voir ch. 3.6). Par conséquent,

$$e^{-a} \leq \frac{1}{1 + a}$$

pour tout $a \geq 0$. Posons $a = \frac{1}{x^2}$. Alors

$$0 \leq e^{-\frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

et par conséquent

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0.$$

Il s'en suit que

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

est une fonction continue car $e^{-\frac{1}{x^2}}$ est une composition des fonctions continues si $x > 0$.

30. **Prolongements, asymptotes.**

(a) La fonction $f\mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x^2}{x - 3}.$$

Donc

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x - 3} = -\frac{1}{2}.$$

En posant $f(1) = -\frac{1}{2}$ on obtient le prolongement par continuité en ce point. Chez $x = 3$ on trouve

$$\lim_{x\to 3_-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3_+} f(x) = +\infty.$$

Les asymptotes sont des droites d'équation $h(x) = ax + b$ avec des coefficients a, b à déterminer. Pour calculer l'asymptote en $-\infty$ noter d'abord que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-3} = 1(= a).$$

Ensuite on calcul

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x-3} = 3(= b).$$

L'asymptote en $-\infty$ est la droite d'équation $h(x) = x + 3$. Les limites en $+\infty$ sont les mêmes et par conséquent, $h(x) = x + 3$ donne également l'asymptote en $+\infty$.

(b) Les asymptotes sont des droites d'équation $h(x) = ax + b$ avec des coefficients a, b à déterminer. Comme dans l'exercice précédent on calcul

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1} - x}{x} = -\sqrt{2} - 1(= a).$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}\cdot x} = 0(= b).$$

L'asymptote en $-\infty$ est la droite d'équation $h_{-\infty}(x) = -(\sqrt{2} + 1)x$. En $+\infty$ on trouve

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1} - x}{x} = \sqrt{2} - 1(= a).$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}\cdot x} = 0(= b).$$

L'asymptote en $+\infty$ est la droite d'équation $h_{+\infty}(x) = (\sqrt{2} - 1)x$.

(c) Donner les asymptotes obliques de $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} + |x|$ en $-\infty$ et $+\infty$: $h_{-\infty}(x) = -x + 1$ et $h_{+\infty}(x) = x + 1$.

(d) Donner les asymptotes de $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} + |x|$ en $-\infty$ et $+\infty$: $h_{-\infty}(x) = 0$ et $h_{+\infty}(x) = 2x$.

(e) Donner les asymptotes de $f(x) = x\tanh x + x$ en $-\infty$ et $+\infty$: Noter d'abord que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

En $-\infty$ nous avons en utilisant $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\cosh^2 x} = 0$ (car $2\cosh x \geq e^{|x|}$) que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(\tanh^2 x - 1)}{\tanh x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\cosh^2 x(\tanh x - 1)} = 0.$$

Donc $h_{-\infty}(x) = 0$. En $+\infty$ noter que

$$f(x) - 2x = x(\tanh x - 1) = \frac{x(\tanh^2 x - 1)}{\tanh x + 1} = \frac{-x}{\cosh^2 x(\tanh x + 1)}$$

et comme avant

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2\cdot x = 0,$$

, d'où $h_{+\infty}(x) = 2x$.

31. **Comportement asymptotique.** On calcul les coefficients de manière récurrente :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2} = 1(= a).$$

Ensuite,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - ax^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1 - x^4}{x(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + x^2)} = 0(= b)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - ax^2 - bx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1 - x^4}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + x^2} = \frac{1}{2}(= c)$$

On obtient $h(x) = x^2 + \frac{1}{2}$.

32. **Propriétés des fonctions continues.** Il suffit de montrer que $g(x) := f(x) - x$ admet au moins un zéro. Puisque la fonction f est surjective, il existe $s, t \in [a, b]$ tels que $f(s) = c$ et $f(t) = d$. Alors,

$$g(s) = c - s \leq c - a < 0 \quad \text{et} \quad g(t) = d - t \geq d - b > 0.$$

Puisque la fonction g est continue, il existe (par le théorème de la valeur intermédiare) au moins un zéro de g.