Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section des mathématiques

Joachim Stubbe

Analyse I
Sections EI, GM — Examen propédeutique I (régime 2010-2011)

Répétion en classe

Exo 1 / 10	Exo 2 /10	Exo 3 / 15	Exo 4 /10	Exo 5 / 10	Exo 6 /15

Les notes avaient été calculés sur 60 points.

Les stats :

1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
2	7	8	17	22	27	28	25	19	17	15

1. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

Calculer ensuite la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}}.$$

Converge-t-elle absolument ?

Corrigé. Pour $n = 1$ nous avons

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{(-1)^{1+1}}{2 \cdot 1 + 1}$$

donc l'affirmation est vraie. Pour conclure notons que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} + \frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+2}4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+2}(-2n-3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{(-1)^{n+2}4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{n+2}}{2n+3}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} = 1.$$

Cette série ne converge pas absolument car

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2 - \frac{1}{4}} \right| \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

2. (a) Donner la série exponentielle et montrer qu'elle est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En utilisant
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$
   montrer
$$\cos(x) + \cosh(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}.$$
   (c) Montrer que $x = 0$ est l'unique point stationnaire de $\cos(x) + \cosh(x)$.
   (d) Donner la série entière de $\sinh(x) + \sin(x)$.

Corrigé.
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k)!}$$
et sa convergence selon d'Almenbert ou Cauchy et de
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$
(les puissances impaires disparaissent) conclure que
$$\cos(x) + \cosh(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}.$$
Il faut mentionner la convergence absolue qui permet changer l'ordre de sommation !
$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x) + \cosh(x)\right) = -\sin(x) + \sinh(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}$$
donc $x = 0$ est un point staionnaire. D'autre part (convergence absolue de la série entière)
$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x) + \cosh(x)\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}$$
La série est strictement positive pour tout $x > 0$ et strictement négative pour $x < 0$ ($4k-1$ est impair). La partie (d) soit par calcul direct ou par
$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\cos(x) + \cosh(x)\right) = \sin(x) + \sinh(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!}.$$

3. Soit $f : [-5, 3] \to \mathbb{R}$ donné par

$$f(x) = x^2 + x - 4|x| + 2.$$

où $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

(a) Donner les zéros de f.

(b) Donner les extremums locaux de f.

(c) Donner $\min f(x)$ et $\max f(x)$ sur l'intervalle $[-5, 3]$. En quels points f atteint ces valeurs ? Donner une liste complète de ces points.

(d) Montrer que $F : [-5, 3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) := \int_{-5}^{x} f(t)\, dt$$

vérifie

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x|x| + 2x - \frac{65}{6}.$$

En quels points F atteint des extremums locaux ?

Corrigé :

(a) Les zéros de f : $2, 1, -5/2 + 1/2\sqrt{17}, -5/2 - 1/2\sqrt{17}$

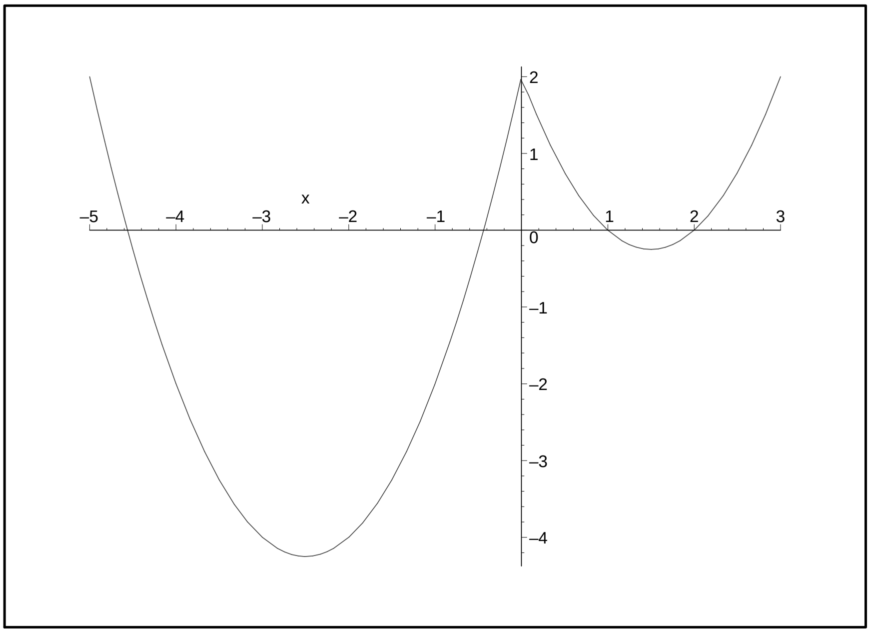
(b) Les extremums locaux de f : en $-5/2, 3/2$ (points stationnaires de f, min loc) et en 0 (max loc)
$f(-5/2) = -17/4, f(3/2) = -1/4,\ f(0) = 2$

(c1) $\min f(x) = -17/4$ atteint en $x = -5/2$

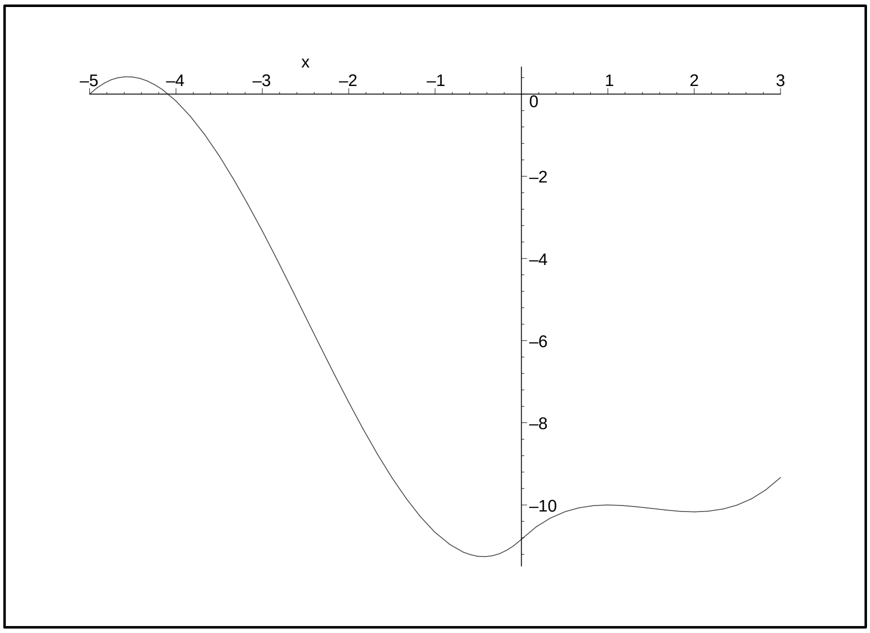
(c2) $\max f(x) = 2$ atteint en $x = -5, 0, 3$

(d) Vérifier $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$ et en $x = 0$ (voir que $x|x|$ est dérivable) et $F(-5) = 0$. Les extremums locaux de F se trouvent en : les zéros de f (1 point).

Le graphe de $f(x)$:



Le graphe de $F(x)$:



4. Donner les limites suivantes (entrer vos résultats dans ces équations) :

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 5_+} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}} = 0$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\ln(2+x)}{1-\ln(1+x)} = -\ln 2$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2\sqrt{x}})}{\ln(\sqrt{x}-1)-\ln\sqrt{x}} = -\pi/2$$

(e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(6x)}{\cosh^6(x)} = 32$$

5. Donner le développement limité d'ordre 3 des fonctions suivantes en $x = 0$ (avec les précises "o" ou "O") :
Notation : Si les "o" ou "O" sont faux ou pas donnés déduire 1 point (donc 0 point pour a etb).

$f(x) =$	
$x^3 + 4x^2 + x + 3$	$= 3 + x + 4x^2 + x^3$ c'est exact
$x^5 + x^3 + x^2 + 1$	$= 1 + x^2 + x^3 + O(x^5)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$ (série géométrique)
$(x^2 + 2)\cos x$	$= 2 + O(x^4)$
$e^{x\ln(1+x)}$	$= 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + O(x^4)$

6. Donner les intégrales suivantes (entrer vos résultats dans ces équations) :

   (a)
$$\int_0^1 \frac{x+2}{x+3}\,dx = \ln(3) + 1 - 2\ln(2)$$

   (b)
$$\int_0^x \frac{\sinh t}{1+\cosh t}\,dt = -\ln(2) + \ln(\cosh(x)+1)$$
   i.e. voir la dérivée logarithmique

   (c)
$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = 1/2$$
   par deux intégrations par partie (voir polycopie)

   (d)
$$\int_0^1 t^5\sqrt{1-t^3}\,dt\frac{1}{3}\int_0^1 z\sqrt{1-z}\,dz = \int_0^1 (z{-}1{+}1)\sqrt{1-z}\,dz = 4/45$$
   par le changement de variable $z = t^3$, donc $3t^2dt = dz$.

   (e)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = 1/2$$
   en utilisant $\tan x = \sin x/\cos x$.