Analyse I pour Ingénieurs - Exercices 2006-2007

Joachim STUBBE

20 octobre 2006

Chapitre 1

Nombres

1.1 Exercices

1. **Axiomes.** En utilisant les axiomes algébriques d'un corps $\mathbb{K}$ montrez l'élément neutre de l'addition 0 est unique.

2. **Axiomes.** En utilisant les axiomes algébriques pour les nombres réels montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $0 \cdot x = 0$ et $(-1) \cdot x = -x$. En déduire que $(-1) \cdot (-1) = 1$.

3. **Axiomes.** En utilisant les axiomes d'ordre pour les nombres réels et le résultat de l'exercice 2 montrez que pour tout $x \neq 0$ on a : $x^2 := x \cdot x > 0$, i.e. le carré d'un nombre réel nonzéro est positif.

4. **La progression géométrique.** Montrez que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n :

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k$$

   En déduire que la somme d'une *progression géométrique*, à savoir pour tout réel $a \neq 1$ et tout entier positif n :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

5. Montrez que pour $2000^{2000} - 1$ est divisible par 1999.

6. **Inégalité de Young.** Montrer que pour tout entier positif n et tout $a, b > 0$:

$$b(b^n - a^n) - na^n(b - a) \geq 0.$$

   En déduire pour tout $x, y > 0$ *l'inégalité de Young* :

$$xy \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{ny^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}.$$

7. **Une progression arithmétique.** Montrez que pour tout entier positif n :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. **La somme de carrés d'entiers.** Montrez que pour tout entier positif n :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
En déduire la somme suivante :
$$\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2).$$

9. **La somme alternée de carrés d'entiers.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

10. **Une inégalité pour le factoriel.** Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$:
$$n! > 2^n.$$
Donner le plus petit n_0 possible.

11. **La somme de cubes d'entiers.** Pour tout entier positif n donner
$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$
Idée : Appliquer l'identité
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$$
et les résultats des exercices 7 et 8.

12. **La formule de binôme de Newton.** Soient k, n des entiers tels que $0 \leq k \leq n$. On définit le coefficient binomial C_n^k par
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
Vérifiez que pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Montrez que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n la *formule de binôme de Newton* :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(a) Constater que pour tout entier $n > 1$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(b) Montrez que pour tout entier $n > 1$, l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'admet aucune solution pour $a, b, c \in \mathbb{N}$ avec $0 < a, b < n$.

13. **Sommes téléscopiques I.**
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction définie pour tout entier naturel n. Montrer par récurrence la somme téléscopique

$$f(n+1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n} \big(f(k+1) - f(k)\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) En posant $f(n) = a^n$ pour un $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ démontrer ainsi la formule pour la progression géométrique (voir l'exercice 4)

(b) Poser $f(n) = n^2$ et en déduire la formule pour la progression arithmétique (voir l'exercice 7)

(c) Trouver une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} k a^k.$$

14. **Sommes téléscopiques II.** En posant $f(n) = \sin((n+a)x)$ avec $a, x \in \mathbb{R}$ choisir a convenablement et donner pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx.$$

15. **L'inégalité de Bernoulli.** Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout entier positif n *l'inégalité de Bernoulli* :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

16. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz I.** Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \mathbb{R}$. Montrer *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*, à savoir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

En déduire que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Idée : Pour montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz noter que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k y_k x_l y_l$$

et écrire $x_k y_k x_l y_l$ comme somme et différence des carrés pour conclure.

17. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz II *.** Montrer *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*, à savoir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

par récurrence.

18. **L'inégalité des moyens géométriques et arithmétiques I*.**Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ dont le produit vaut 1. Montrer que

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

19. **L'inégalité des moyens géométriques et arithmétiques II*.** Soient $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$. Montrer que leur *moyenne géométrique*, est inférieure à leur *moyenne arithmétique*. Autrement dit,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

20. **Un produit fini.** Montrez que pour tout entier positif n :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

21. **Nombres rationnels et irrationels***
    (a) Montrer qu'entre deus irrationnels distincts, il y a une infinité de rationnels.
    (b) Montrer qu'entre deus rationnels distincts, il y a une infinité d'irrationnels.

22. **Nombres complexes.** Soit $z = x + iy \neq i$. Ecrire, en fonction de x et y

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{z-i}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{im}\left(\frac{z^2}{z-i}\right).$$

23. **Nombres complexes.** Soit $z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta) \neq 0$. Ecrire, en fonction de r et θ

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) \equiv \mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) \text{ et } \Im\left(z - \frac{1}{z}\right) \equiv \mathrm{Im}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

24. **Nombres complexes.** Soit $z = e^{i\theta}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$$

et

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta.$$

25. **Nombres complexes.** Pour le nombre complexe $z = 1 - i$, calculer $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$ et z^{-1}.

26. Calculer

$$\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^{19}.$$

27. **Sommes trigonométriques.** Soit $\theta \neq 2\pi p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n \geq 1$ calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}.$$

En déduire les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta.$$

28. **Équations de degré 2.**
    (a) Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$.
    (b) Résoudre $z^2 + 2z + 5 = 0$.
    (c) Résoudre $4z^2 + 2z + 1 = 0$.
    (d) Résoudre $z^2 - 2iz - 3 = 0$.
    (e) Résoudre $(1+i)z^2 + (-1+7i)z - (10-2i) = 0$.

29. **Équations de degré 3.**
    (a) Résoudre $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$.
    (b) Résoudre $2z^3 + 14z^2 + 41z + 68 = 0$.

30. **Équations algébriques.**
    (a) Résoudre
    $$z^6 + i = 0$$
    .
    (b) Vérifier que $2 + i$ est une solution de l'équation
    $$z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0.$$
    Trouver les trois autres racines.
    (c) Résoudre l'équation
    $$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$$
    sachant qu'elle admet une racine qui est imaginaire pure.
    (d) Résoudre $z^4 + 3z^2 + 1 = 0$.
    (e) Résoudre $z^4 + 1 = 0$. Ècrire $z^4 + 1$ comme produit de deux polynômes de degré 2 àcoefficients réels.

31. **Point fixe d'une application.** Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. On appelle $p \in \mathbb{C}$ un point fixe de l'application f si $p = f(p)$. Trouver les points fixes de f si $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

32. **Équations d'un cercle dans le plan complexe.** Soit $r > 0$ tel que $r \neq 0$ et $r \neq 1$. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ l'ensemble S définie par
    $$S := \{z \in \mathbb{C} : |\frac{z - z_0}{z}| = r\}$$
    représente un cecle. Donner son centre et son rayon.

33. **Image d'un cercle sous une application affine.** Soit $S := \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + 2i)| = 1\}$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application affine donneé par $f(z) = (2 + 3i)z + 4 + 5i$. Donner l'ensemble $f[S]$, i.e. l'image du cercle S sous f.

34. **Image d'un cercle sous l'application $\mathbf{f(z) = \frac{1}{z}}$.*** Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ tel que $|z_0| \neq R$ soit
    $$S_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| = R\}.$$
    Démontrer la proposition suivante : L'image du cercle $S_R(z_0)$ sous l'application $z \to \frac{1}{z}$ est le cercle
    $$S_{\frac{R}{|R^2 - |z_0|^2|}}\left(\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}\right)$$
    Quels cercles sont identiques à leurs immages sous cette application ?