Chapitre 3

Séries I

3.1 Exercices

1. **Calcul des séries et des limites.**
   (a) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$$
   (b) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}$$
   (c) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k^3+4k^2+5k+2}$$
   (d) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+3k+2}{k^4+7k^3+17k^2+17k+6}$$
   (e) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
   (f) Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
   (g) Calculer
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{5^n}$$
   (h) Calculer
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}$$

(i) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

(j) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right)$$

2. **Convergence des séries.** Etudier la convergence des séries suivantes :

(a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3+1}{n^3+1}$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin 5n^2}{n^2+1}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n!}{n^2}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 4n}{n^2}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+1}}$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

(n) Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, la convergence de la série suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}-1}$$

3. **Une série alternée.** Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$
Calculer ensuite la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{k^2-\frac{1}{4}}.$$
Converge-t-elle absolument ?

4. **Une série convergente.** Montrer que pour $|q| < 1$ la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$
est absolument convergente. Calculer sa valeur. Idée : Montrer que
$$(1-q)\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$
ou calculer les sommes partielles (voir l'exercice 13 du ch. 1)

5. **Convergence d'un série.** Si $1 < \alpha \leq 2$ montrer que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge. Idée : Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p

$$S_{2^p-1} = \sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

et montrer ensuite que pour tout entier naturel n

$$S_n \leq \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}.$$

6. **Combinaison des séries géométriques.** Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3+(-1)^n)2^{-n}$$

est absolument convergente et donner sa valeur.

3.2 Corrigés

1. **Calcul des séries et des limites.**

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$$

car

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = 1$$

car

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

(c)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k^3+4k^2+5k+2} = 1$$

car

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k^3+4k^2+5k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$