ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1ère année
Prof. J. Rappaz

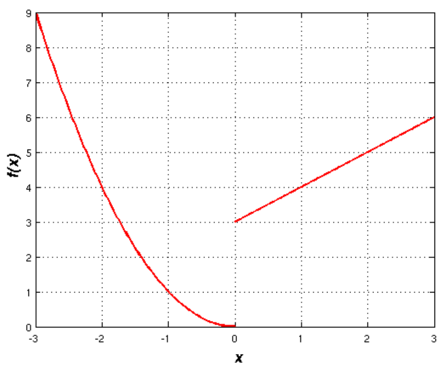
Semaine du 24 au 28 octobre 2011

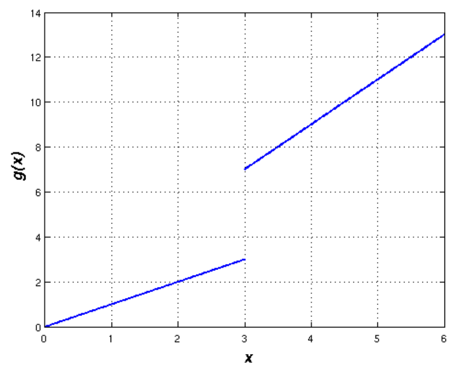
Corrigé 6 du lundi 24 octobre 2011

Exercice 1.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x \geq 0, \\ x^2, & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \geq 3, \\ x, & \text{si } x < 3. \end{cases}$$





- $g \circ f$:

$$g\big(f(x)\big) = \begin{cases} 2f(x)+1, & \text{si } f(x) \geq 3, \\ f(x), & \text{si } f(x) < 3, \end{cases} = \begin{cases} 2f(x)+1, & \text{si } x \geq 0 \text{ ou } x \leq -\sqrt{3}, \\ f(x), & \text{si } -\sqrt{3} < x < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+7, & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2+1, & \text{si } x \leq -\sqrt{3}, \\ x^2, & \text{si } -\sqrt{3} < x < 0. \end{cases}$$

- $f \circ g$:

$$f\big(g(x)\big) = \begin{cases} g(x)+3, & \text{si } g(x) \geq 0, \\ g(x)^2, & \text{si } g(x) < 0, \end{cases} = \begin{cases} g(x)+3, & \text{si } 0 \leq x < 3 \text{ ou } x \geq 3, \\ g(x)^2, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+3, & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2x+4, & \text{si } x \geq 3, \\ x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+25}$.

- *Rappel :* L'image de la fonction f est définie par

$$Im(f) = \big\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f), \ \text{ tel que } y = f(x) \big\}.$$

On cherche donc les $y \in \mathbb{R}$ tels que l'équation suivante admette des solutions:

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow \ y = \frac{2x}{x^2+25} \ \Leftrightarrow \ x^2 y - 2x + 25y = 0.$$

Si $y = 0$, l'équation est du premier degré et admet pour unique solution $x = 0$. Si $y \neq 0$, l'équation est du deuxième degré et admet des solutions réelles si et seulement si

$$\Delta = 4 - 100y^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{5}.$$

On conclut donc que $Im\, f = \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

- f n'est pas injective car, pour tout $y \in \left] -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right[\setminus \{0\}$, il existe deux éléments distincts de $D(f)$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 25y^2}}{y},$$

tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Exercice 3.

a) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Montrons que la fonction composée $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

Démonstration : Soient $a \leq b$. Puisque g est croissante, on a $x := g(a) \leq g(b) =: y$.

Mais comme f est croissante et $x \leq y$, on a

$$f(x) \leq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad f(g(a)) \leq f(g(b)) \quad \Leftrightarrow \quad (f \circ g)(a) \leq (f \circ g)(b).$$

$\square$

b) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions décroissantes. Montrons que la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

Démonstration : Soient $a \leq b$. Puisque f est décroissante, on a $x := f(a) \geq f(b) =: y$.

Mais comme g est décroissante et $x \geq y$, on a

$$g(x) \leq g(y) \quad \Leftrightarrow \quad g(f(a)) \leq g(f(b)) \quad \Leftrightarrow \quad (g \circ f)(a) \leq (g \circ f)(b).$$

$\square$

Exercice 4.

Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Démonstration : Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} \sin x < x < \text{tg } x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x < \quad x \quad < \frac{\sin x}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow \quad \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a également pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$$\cos(x) = \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Donc, pour tout $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, nous avons la relation : $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \cos x = 1$, on obtient, par le théorème des deux gendarmes, le résultat cherché.

$\square$