Corrigé 8 du lundi 7 novembre 2011

Exercice 1.

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1-x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est continue en $\frac{1}{2}$ et discontinue ailleurs.

Démonstration :

1.) f est continue en $x_0 = \frac{1}{2}$. En effet

$$f(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{2} - x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

et donc $|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta = \varepsilon$ et on a

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad |x - \frac{1}{2}| < \delta.$$

2.) f est discontinue en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
Il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, $a_n \neq x_0$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. On obtient

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - a_n) = 1 - x_0.$$

Il existe une suite $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $b_n \neq x_0$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. On obtient

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n) = x_0.$$

Mais si $x_0 \neq \frac{1}{2}$, alors $1 - x_0 \neq x_0$ et donc f n'est pas continue en x_0.

$\square$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{\sqrt{|x|}}$.
On va montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ n'existe pas.

Démonstration :

- Considérons la suite $\left(a_n = \frac{1}{(2\pi n)^2}\right)_{n\geq 1}$. On a $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
  De plus,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin\left((2\pi n)^2\right)}{(2\pi n)^2}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1,\ \forall n} \right) = 1.$$

- Si on considère la suite $\left(b_n = \frac{1}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^2}\right)_{n\geq 1}$. On a $b_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
  De plus,
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin\left(\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2\right)}{(2\pi n + \frac{\pi}{2})^2}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}_{=0,\ \forall n} \right) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

$\square$

Ainsi, ce n'est pas possible de prolonger f par continuité en $x = 0$.

Exercice 3.

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$ un ouvert et soit f une fonction continue définie sur D.

1.) Montrons que si $B \subset \mathcal{R}(f)$ est ouvert, alors $A = f^{-1}(B)$ est aussi ouvert.
Démonstration : Supposons $B \subset \mathcal{R}(f)$ et B ouvert et posons
$$A = f^{-1}(B) = \{x \in D : f(x) \in B\}.$$
Par définition, A est ouvert si pour $x_0 \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset A$. Soit donc $x_0 \in A$.

- Puisque B est ouvert et $f(x_0) \in B$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset B$.
- Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que
$$\forall x \in D,\ |x - x_0| < \delta_1, \quad \text{on a} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
- Puisque D est ouvert, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $\big]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2\big[\subset D$. Ainsi, en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\text{si} \quad |x - x_0| < \delta \text{ alors } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$
ce qui revient à dire que
$$f(x) \in \,]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[.$$
- Puisque $]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[\subset B$, on a $f(x) \in B$ lorsque $|x - x_0| < \delta$ et donc $x \in A$, pour tout $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Ceci prouve que A est ouvert.

$\square$

2.) Montrons que si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue et injective sur D ouvert, et si $A \subset D$ est un ouvert, alors $f(A)$ est aussi ouvert.
Démonstration : Soit $y_0 \in f(A)$, montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]y_0 - \delta,\ y_0 + \delta[\, \subset f(A)$.
- Il existe $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = y_0$ et comme A est ouvert, il existe $\chi > 0$ tel que $]x_0 - \chi,\ x_0 + \chi[\subset A$.
- Si $I =]x_0 - \chi,\ x_0 + \chi[$, alors f est continue et injective sur I; elle est donc strictement monotone sur I (cf. théorème 3.8 du cours).
- Supposons sans restriction de la généralité f strictement croissante. Alors
$$f\left(x_0 - \frac{\chi}{2}\right) < f(x_0) < f\left(x_0 + \frac{\chi}{2}\right).$$
- Par le théorème de la valeur intermédiaire (théorème 3.7), en posant
$$\delta = \min\left(\left|f(x_0) - f(x_0 + \frac{\chi}{2})\right|\ ,\ \left|f(x_0) - f(x_0 - \frac{\chi}{2})\right|\right),$$
on obtient
$$\forall y \in \Big]f(x_0) - \delta,\ f(x_0) + \delta\Big[,\ \exists x \in]x_0 - \chi,\ x_0 + \chi[\text{ tel que } f(x) = y.$$
Ainsi $y \in f(A)$ et on a montré que
$$\Big]y_0 - \delta,\ y_0 + \delta\Big[\ = \ \Big]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta\Big[\ \subset f(A).$$
Ainsi, $f(A)$ est ouvert.

- On en déduit que f^{-1} est continue en y_0. En effet, si $0 < \epsilon < \frac{\chi}{2}$ est donné, il existe $\delta > 0$ donné par $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \epsilon)\ ,\ f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)\}$ tel que si $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ alors $f^{-1}(y) \in]f^{-1}(y_0) - \epsilon, f^{-1}(y_0) + \epsilon[$.

$\square$