ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 14 au 18 novembre 2011

Corrigé 9 du lundi 14 novembre 2011

Exercice 1.

Rappel: Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur D si

$$\exists k > 0 \text{ tq } \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|.$$

Montrer que f n'est pas lipschtzienne sur D si et seulement si

$$\exists (x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty} \subset D \ \text{ tq } |f(x_n) - f(y_n)| > n\,|x_n - y_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1^o.) Supposons f non lipschitzienne. Alors

$$\forall k > 0,\ \exists x, y \in D \text{ tq } |f(x) - f(y)| > k\,|x - y|.$$

Prenons alors $k = n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe x_n et y_n tels que $|f(x_n) - f(y_n)| > n\,|x_n - y_n|$.

2^o.) Supposons maintenant que

$$\exists (x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty} \subset D \ \text{ tq } |f(x_n) - f(y_n)| > n\,|x_n - y_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

et montrons que f n'est pas lipschitzienne. Supposons, par l'absurde, que f soit lipschitzienne. Il existe donc $k > 0$ tel que $\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$. Il suffit alors de prendre un entier $n > k$, pour avoir $|f(x_n) - f(y_n)| > k\,|x_n - y_n|$. D'où la contradiction.

Exercice 2.

Calculons

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^x} \right).$$

Pour $x > 1$, on a:

$$0 \leq \frac{\ln n!}{n^x} \leq \frac{n \ln n}{n^x} = \frac{\ln n}{n^{x-1}},$$

d'où on tire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^x} = 0,$$

et donc que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^x} \right) = 0.$$

On ne peut pas intervertir les deux limites. On remarque en effet que pour $n \geq 2$,

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \geq \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2},$$

ainsi on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln n!}{n^x} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n} = \infty \neq 0.$$

Exercice 3.

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strictement contractante, i.e.

$$\exists k < 1 \text{ tel que } |f(x) - f(y)| \le k|x - y|, \ \forall x, y \in [a, b].$$

1.) La fonction f est continue puisqu'elle est lipschitzienne. Par le théorème 3.9 du cours, f admet (au moins) un point fixe c. Ce point fixe est unique car si on suppose par l'absurde qu'il existe $\bar{\bar{x}} \in [a, b]$ est un autre point fixe $\bar{\bar{x}} \neq c$, on a

$$|c - \bar{\bar{x}}| = |f(c) - f(\bar{\bar{x}})| \le k|c - \bar{\bar{x}}| < |c - \bar{\bar{x}}|,$$

ce qui est absurde.

2.) Posons $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, avec $x_0 \in [a, b]$. Clairement, on a que si $x_n \in [a, b]$ alors $f(x_n) = x_{n+1} \in [a, b]$ puisque $\mathcal{R}(f) \subset [a, b]$.

De plus

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le k|x_n - x_{n-1}|, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots,$$

ce qui implique

$$|x_{n+1} - x_n| \le k^n |x_1 - x_0| = k^n |f(x_0) - x_0|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\le |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(k^{n+m-1} + k^{n+m-2} + \ldots + k^n\right) |f(x_0) - x_0| = k^n \frac{1 - k^m}{1 - k} |f(x_0) - x_0|. \end{aligned}$$

On conclut donc que

$$|x_{n+m} - x_n| \le k^n |f(x_0) - x_0| \cdot \frac{1}{1 - k}, \ \forall n \ge 0, \forall m \ge 1.$$

3.) La suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est de Cauchy et donc convergente. On a alors l'existence de $\bar{x}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Puisque $[a, b]$ est fermé, on a $\bar{x} \in [a, b]$ et comme f est continue, on a $\bar{x} = f(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe. On a donc $c = \bar{x}$.

4.) On a $|c - x_n| = \lim_{m\to\infty} |x_{n+m} - x_n| \le k^n |f(x_0) - x_0| \cdot \dfrac{1}{1 - k}, \quad \forall n \ge 0.$

Exercice 4 .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en $a \in \mathbb{R}$ et

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.) On a $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, ce qui implique $f(0) = 0$.

2.) Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a

$$f(x_n + a) = f(x_n) + f(a) \Rightarrow f(x_n) = f(x_n + a) - f(a).$$

On pose $a_n = x_n + a$ et puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Comme f est continue en a, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(a_n) - f(a)\Big) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$.

3.) Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ converge vers $b \in \mathbb{R}$, on a

$$f(b_n) = f(b_n - b + b) = f(b_n - b) + f(b) \Rightarrow f(b_n) - f(b) = f(b_n - b).$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} (b_n - b) = 0$ et f est continue en $x = 0$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} (f(b_n) - f(b)) = 0.$$

4.) Si $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + 2\,f(1) = \ldots = f(0) + n\,f(1) = n\,f(1).$$

De même on a $f(-n) = -n\,f(1)$. Ainsi $\forall z \in \mathbb{Z}$ on a $f(z) = z\,f(1)$.
Si $x \in \mathbb{Q}$ on a $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ et

$$pf(1) = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f\Bigg(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q \text{ fois}}\Bigg) = q\,f\left(\frac{p}{q}\right) = q\,f(x).$$

Ainsi $f(x) = x\,f(1),\ \forall x \in \mathbb{Q}$. La fonction g définie par $g(x) = x\,f(1)$ est trivialement continue et de $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Ainsi

$$f(x) = x\,f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$