Corrigé 10 du lundi 21 novembre 2011

Exercice 1 (* A rédiger) .

On considère $D = \mathbb{R} - \{0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{-1/|x|}.$$

Montrons que $\forall \alpha > 0$, $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|^\alpha\big)$ si $x \to 0$.
Soit $\alpha > 0$ donné. Il existe $M > 0$ tel que $\forall\, |y| \geq M$ on a

$$\alpha \ln |y| \leq |y| \qquad \text{car} \qquad \lim_{|y|\to\infty} \frac{|y|}{\ln |y|} = +\infty.$$

En prenant $x = \dfrac{1}{y}$, on obtient:

$$\text{si } |x| \leq \frac{1}{M} \qquad \text{alors} \qquad \ln \frac{1}{|x|^\alpha} \leq \frac{1}{|x|}$$

et donc

$$\ln |x|^\alpha \geq -\frac{1}{|x|}.$$

Comme la fonction exponentielle est croissante, on obtient si $|x| \leq \frac{1}{M}$:

$$|x|^\alpha \geq e^{-1/|x|},$$

ce qui prouve que $e^{-1/|x|} = \mathcal{O}\big(|x|^\alpha\big)$ si $x \to 0$.

<u>Remarque:</u> On rappelle que, selon la définition de $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|^\alpha\big)$ si $x \to x_0$ (c.f. polycopié page 57), la fonction f n'est pas nécessairement définie au point x_0 et même si c'est le cas, $f(x_0)$ n'entre pas dans la définition de $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|^\alpha\big)$ si $x \to x_0$. Il en est de même pour $f(x) = o\big(|x|^\alpha\big)$ si $x \to x_0$.

Exercice 2.

On considère $D = \mathbb{R} - \{0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln |x|}.$$

Montrons que $f(x) = o\big(|x|\big)$ si $x \to 0$ et qu'il n'existe pas $\epsilon > 0$ qui satisfait $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{1+\epsilon}\big)$ si $x \to 0$.
On a, si $x \neq 0$: $\dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq \dfrac{|x|}{|x|\,|\ln |x||} = \dfrac{1}{|\ln |x||}$. Si $|x| \underset{\neq}{\to} 0$ alors $\ln |x| \to \infty$ et on a bien

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0$$

ce qui implique que $f(x) = o\big(|x|\big)$ si $|x| \to 0$.

<u>Remarque:</u> Puisque $f(x) = o\big(|x|\big)$ si $x \to 0$ alors $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|\big)$ si $x \to 0$.

Montrons que si $\epsilon > 0$ est donné et si on suppose $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{1+\epsilon}\big)$ si $x \to 0$, alors on a une contradiction. Il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\frac{|x|}{|\ln|x||} \leq C|x|^{1+\epsilon} \quad \text{si} \quad 0 < |x| \leq \delta$$

et donc

$$|x| \leq C|x|^{1+\epsilon}|\ln|x|| \quad \text{si} \quad 0 < |x| \leq \delta$$

ou encore

$$1 \leq C|x|^{\epsilon}|\ln|x|| \quad \text{si} \quad 0 < |x| \leq \delta.$$

Mais si $|x|$ tend vers zéro, alors on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} |x|^{\epsilon} \ln|x| = 0$$

ce qui contredit la dernière inégalité. Ainsi, il n'existe pas $\epsilon > 0$ qui satisfait $f(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{1+\epsilon}\big)$ si $x \to 0$.

<u>Exercice 3.</u>

On a:

1^o) $f'(x) = \dfrac{1 + x^4 - x\,4x^3}{(1+x^4)^2} = \dfrac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$,

2^o) $f'(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2+x^4}\right) \cdot \dfrac{2x+4x^3}{2\sqrt{1+x^2+x^4}} = \cos\left(\sqrt{1+x^2+x^4}\right) \cdot \dfrac{x+2x^3}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$,

3^o)

- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]z, z+1[$. Ainsi $f(x) = x^2 z$ et

$$f'(x) = 2zx = 2[x]\,x \text{ pour tout } x \in]z, z+1[.$$

- Si $x = 0$ on a $f(0) = 0$. De plus, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $a_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = 0,$$

  ce qui signifie que $f'(0) = 0$.

- Si $z \in \mathbb{Z}^*$ alors

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x<z}} f(x) = z^2\,(z-1) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to z \\ x>z}} f(x) = z^3.$$

  Ainsi f n'est pas continue en z et donc $f'(z)$ n'existe pas.

  En résumé : $f'(x) = 2[x]x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ et $f'(x)$ n'existe pas si $x \in \mathbb{Z}^*$, $f'(0) = 0$.

<u>Exercice 4.</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

- f est dérivable en zéro car $f'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$
- f est discontinue sur $\mathbb{R}^*$.
  En effet, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, on peut construire une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et une suite $(b_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0 \in \mathbb{R}^*.$$

  Puisque

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = x_0^3 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

  on en déduit que la fonction f n'est pas continue en x_0.

Exercice 5.

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. Alors on sait que f admet une fonction réciproque continue $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to]a,b[$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, montrer que f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et que

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, ce qui signifie qu'il existe $\delta_1(\epsilon) > 0$ tels que si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ alors $x \in]a,b[$ et

$$\left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| \leq \epsilon.$$

Puisque f est bijective, il existe $y_0 \in \mathcal{R}(f)$ tel que $x_0 = f^{-1}(y_0)$. De même, $\forall x \in]a,b[$ il existe un unique $y \in \mathcal{R}(f)$ tel que $x = f^{-1}(y)$ de sorte que

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}.$$

Puisque f^{-1} est continue en y_0, il existe $\delta_2(\epsilon) > 0$ tel que si $|y - y_0| < \delta_2$ alors $|x - x_0| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \delta_1$, et donc

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| \leq \epsilon.$$

Ce qui prouve que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et que $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

$\square$