ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 17 au 21 octobre 2011

Série 5 du lundi 17 octobre 2011

Exercice 1.

Pour un réel $\alpha > 0$, étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^8}$ en utilisant le critère de la limite supérieure.

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$$

converge.

Exercice 3.

Etudier la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} \right).$$

Exercice 4 (* A rédiger) .

Trouver les trois constantes α, β et μ de sorte que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

En déduire la somme de la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

Indication: On suppose connu le résultat que l'on verra plus tard:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$