ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 24 au 28 octobre 2011

Série 6 du lundi 24 octobre 2011

Exercice 1.

Pour les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 3 \\ x & \text{si } x < 3, \end{cases}$$

calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+25}.$$

Trouver $Im(f)$. La fonction f est-elle injective?

Exercice 3.

a) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Montrer que la fonction composée $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

b) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions décroissantes. Montrer que la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

Exercice 4.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ à partir des inégalités:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$