ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 26 au 30 septembre 2011

Corrigé 2 du mercredi 28 septembre 2011

Exercice 1.

Soit $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(1) Montrons que $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2n^2}$.

Démonstration : Commençons par montrer l'indication. Pour tout $\delta > 0$ on a

$$(\sqrt{1+\delta})^2 = 1 + \delta < 1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2,$$

et donc, en prenant la racine,

$$\sqrt{1+\delta} < 1 + \frac{\delta}{2}.$$

On a alors:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - 1\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - 1\right)$$

et donc en utilisant l'indication:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - 1\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2} - 1\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

$\square$

(2) Soit $\varepsilon > 0$ donné. En choisissant $N = N(\varepsilon) > \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ on a par l'étape précédente:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2N^2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Exercice 2.

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n)$ n'existe pas.

Démonstration : Ab absurdo, supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n) = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Pour $n \geq 0$ on a

$$\underbrace{\sin(n+2)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \ell} = \underbrace{\sin(n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \ell} + 2\sin(1)\cos(n+1)$$

et on doit donc avoir

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n) = 0.$$

Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sin^2(n) + \cos^2(n) = 1$, à la limite on a

$$\ell^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\ell| = 1.$$

b) Pour $n \geq 0$ on a aussi

$$\underbrace{\cos(n+2)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n\to\infty}} = \underbrace{\cos(n)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n\to\infty}} - 2\sin(1)\sin(n+1)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n) = 0 = \ell.$$

D'où la contradiction.

$\square$

Exercice 3.

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \ell.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, on doit montrer qu'il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \ell \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

On a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \ell \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell| \,.$$

Mais par la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|x_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k \geq m.$$

Ainsi, si $n \geq m$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \ell) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-1} |x_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n} |x_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-1} |x_k - \ell| + \frac{n-m+1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-1} |x_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Posons $\alpha = \sum_{k=1}^{m-1} |x_k - \ell|$. Ainsi $\alpha \geq 0$ et α dépend de ε. Il existe $N \geq m$ tel que $\frac{1}{n}\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N$. On a donc, si $n \geq N$:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-1} |x_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi on a bien montré que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \ell.$$

$\square$