Corrigé 3 du mercredi 5 octobre 2011

Exercice 1.

Soit $x \in]0,1[$ et calculons

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x)(1+x+x^2+\ldots x^n) = 1-x^{n+1}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Si on pose $x=\frac{1}{2}$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1/2}$ et ainsi, puisque $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (critère de d'Alembert) on obtient $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 2$.

Exercice 2.

1^o) Rappelons la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

où $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial qui est en fait le nombre de combinaisons de n éléments pris par k. En appliquant cette formule avec $a=1$, $b=\frac{1}{n}$, on vérifie facilement que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

et par suite $(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ $\quad(0! = 1)$.

2^o) Puisque $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, $k \geq 1$ et que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} \leq 2$, on obtient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3,$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

3^o) Montrons que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. En reprenant l'expression de $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ développée par le binôme de Newton, on vérifie que

$$\begin{aligned}x_n \leq 1 &+ \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\\ &+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ &+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

et ainsi $x_n \leq x_{n+1}$. On conclut que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et bornée; par le théorème (1.1) du cours, elle est convergente. De plus, pour $n = 2$, on a $x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$. On en conclut, puisque $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n > 2$.

Exercice 3.

Calculons
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n!)}{5^n}.$$
On a
$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$
Mais comme $\ln(k) \leq k, \ \forall k \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\ln(n!) \leq \sum_{k=1}^{n} k = n\frac{n+1}{2}.$$
Ainsi
$$\frac{\ln(n!)}{5^n} \leq \frac{n(n+1)}{2 \cdot 5^n} = \frac{n^2}{2 \cdot 5^n} + \frac{n}{2 \cdot 5^n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$
En effet:

- par le critère de d'Alembert, la suite définie par $y_n = \dfrac{n^2}{2 \cdot 5^n}$ converge vers 0 car
$$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{2 \cdot 5^{n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 5^n}{n^2}\right| = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{1}{5}$$
par la propriété (1) des suites convergentes (cours page 8), les suites $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ convergeant vers 0;
- par un raisonnement analogue, on montre que la suite $\dfrac{n}{2 \cdot 5^n}$ converge vers 0;
- d'autre part, puisque $0 \leq \dfrac{\ln(n!)}{5^n} \leq \dfrac{n^2}{2 \cdot 5^n} + \dfrac{n}{2 \cdot 5^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la règle des deux gendarmes (Remarque 1.3 du cours, p. 10) permet de conclure que $\dfrac{\ln(n!)}{5^n}$ converge vers 0.

Exercice 4.

Montrons que si les sous-suites $(x_{2n})_{n \geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ d'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \ell$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \varepsilon, \ \forall n > N$.

- Puisque $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = \ell$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{2n} - \ell| < \varepsilon, \ \forall n > n_1$.
- Puisque $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n+1} = \ell$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{2n+1} - \ell| < \varepsilon, \ \forall n > n_2$.

En posant $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, on a bien $|x_n - \ell| < \varepsilon, \ \forall n > N$.

$\square$