Corrigé 5 du mercredi 19 octobre 2011

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ell \in \mathbb{R}, \;\; \text{tel que} \;\; \lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Démonstration : Développons les sommes partielles de la série:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_0.$$

En passant à la limite, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) - a_0.$$

Ainsi, on a bien que la limite de S_n existe si et seulement si la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ existe.

□

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrons que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty\right)$$

Démonstration :

1) Si on suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, puisque $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, par le critère de comparaison on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty.$$

2) Si on suppose maintenant que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty$, on a en particulier que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0.$$

Ainsi, il existe N tel que $\forall n > N$ on a

$$\frac{a_n}{1+a_n} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 1.$$

Ainsi, si on pose $M = \max_{k=0,\ldots,N} |a_k|$, on a, pour tout $p > N$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{p} a_n &\leq M(N+1) + \sum_{n=N+1}^{p} \frac{a_n}{1+a_n} \underbrace{(1+a_n)}_{\leq 2} \\
&\leq M(N+1) + 2 \sum_{n=N+1}^{p} \frac{a_n}{1+a_n} \\
&\leq M(N+1) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{p} a_n \right)_{p=0}^{\infty}$ est croissante et bornée. On en conclut la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

□

Exercice 3.

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels positifs pour lesquelles il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

1) Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$

Démonstration : Par hypothèse, on a

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = \beta, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi $a_n \leq \beta b_n, \forall n \geq n_0$. Si de plus on pose $M = \max_{k=0,\ldots,n_0-1} |a_k|$, on a pour $p \geq n_0$,

$$S_a^p = \sum_{k=0}^{p} a_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{p} a_k \leq M n_0 + \beta \sum_{k=n_0}^{p} b_k \leq M n_0 + \beta \sum_{k=0}^{p} b_k.$$

Par hypothèse, la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} b_k \right)_{p=0}^{\infty}$, qui est croissante, converge ; posons $\ell > 0$ sa limite. On a alors

$$S_a^p \leq M n_0 + \beta \ell, \quad \forall p \geq n_0.$$

La suite $(S_a^p)_{p=0}^{\infty}$ étant de plus croissante, elle converge et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

□

2) Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$

Démonstration : C'est une conclusion évidente de la relation suivante obtenue au point 1):

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \leq M n_0 + \beta \sum_{k=0}^{p} b_k, \quad \forall p \geq n_0.$$

□