Corrigé 7 du mercredi 2 novembre 2011

Exercice 1.

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et supposons de plus que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que

$$a_n \neq a, \;\; f(a_n) \neq \alpha, \; \forall n \in \mathbb{N} \;\text{ et }\; \lim_{n\to\infty} a_n = a. \qquad (*)$$

Montrons que s'il existe un nombre réel ℓ et une fonction

$$\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$$

qui vérifient $x \in D$ et $0 < |x-a| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$, alors nécessairement $\lim\limits_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}} \delta(\epsilon) = 0$.

Démonstration : Par l'absurde, supposons que l'on ait pas $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \delta(\varepsilon) = 0$.

Alors il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$, $\varepsilon_k > 0$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ et un réel $\gamma > 0$ tels que $\delta(\varepsilon_k) > \gamma, \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Par la propriété (*), il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq D \setminus \{a\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{et} \quad f(a_n) \neq \ell, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais ceci implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 < |a_N - a| \leq \gamma \leq \delta(\varepsilon_k), \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mais, par la définition de la fonction δ, ceci implique que

$$\Big| f(a_N) - \ell \Big| \leq \varepsilon_k, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Finalement, comme $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, on doit obtenir $f(a_N) = \ell$, ce qui est absurde.

□

Exercice 2.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout triplet $x \leq y \leq z$ de I on a

$$(f(y) - f(x))\,(f(y) - f(z)) \leq 0.$$

Montrons que f est monotone.

Démonstration :

On commence par une remarque. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha\beta \leq 0$. Si, de plus, on a $\alpha \geq 0$, on peut conclure ainsi:

- si $\alpha > 0$, alors β doit être ≤ 0,
- si $\alpha = 0$, on ne peut rien dire sur β.

En conclusion, des relations $\alpha\beta \leq 0$ et $\alpha \geq 0$ on ne peut rien dire sur β.

1.) On considère tout d'abord un intervalle fermé $I = [a, b]$ avec $a < b$.

- Si $f(a) = f(b) = C$, on a, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} (f(t) - f(a))\,(f(t) - f(b)) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \big(f(t) - C\big)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(t) = C, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

- Si $f(a) < f(b)$ on va montrer que f est croissante.

  Prenons c tel que $a \leq c \leq b$. On a

$$(f(c) - f(a))\,(f(c) - f(b)) \leq 0. \tag{1}$$

  De plus

$$\begin{aligned} f(a) < f(b) \quad &\Leftrightarrow \quad -f(a) > -f(b) \\ &\Leftrightarrow \quad (f(c) - f(a)) > (f(c) - f(b))\,. \end{aligned}$$

  Par (1), $(f(c) - f(a))$ et $(f(c) - f(b))$ ne peuvent être tous deux > 0. Le plus petit de ces deux nombres, soit $(f(c) - f(b))$, est donc ≤ 0, d'où on tire $f(c) \leq f(b)$.

  De plus, $(f(c) - f(a))$ ne peut être < 0, sinon $(f(c) - f(a))$ et $(f(c) - f(b))$ seraient tous les deux < 0 ce qui contredirait (1). On a donc $(f(c) - f(a)) \geq 0$ et ainsi $f(a) \leq f(c)$.

  Finalement, on a $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

  Prenons maintenant d tel que $c < d \leq b$. Par le même raisonnement, appliqué cette fois à l'intervalle $[c, b]$, on a $f(c) \leq f(d) \leq f(b)$.

  On a ainsi montré que pour tous c, d tels que $a \leq c < d \leq b$, on a $f(c) \leq f(d)$. La fonction f est donc croissante sur $[a, b]$.

- Si $f(a) > f(b)$, on montre la monotonie en remplaçant f par $-f$ dans le raisonnement ci-dessus.

2.) Si I est un intervalle quelconque on montre la monotonie en raisonnant par l'absurde.
Supposons que f ne soit pas monotone sur I, alors il existe 4 éléments $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ de I tels que

$$f(a_1) < f(b_1) \quad \text{et} \quad f(a_2) > f(b_2).$$

On pose alors $a = \min\{a_1, a_2\}$ et $b = \max\{b_1, b_2\}$ et on remarque que la fonction f n'est pas monotone sur $[a, b]$, ce qui contredit la partie 1.).

$\square$

Corollaire : Si f n'est pas monotone sur I, alors il existe un triplet $x < y < z \in I$, tel que

$$(f(y) - f(x))\,(f(y) - f(z)) > 0.$$

Exercice 3.

Soit $I =]0, \infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Clairement f est continue.

En posant $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$, on peut voir que g est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi g est continue sur $[0, 2]$ et donc g est uniformément continue sur $[0, 2]$, ce qui implique que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 < 1$) tel que

$$\text{si} \;\; x, y \in]0, 2], \;\; |x - y| \leq \delta_1 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Montrons que f est uniformément continue sur $[1,+\infty[$. En effet si $x, y \in [1, \infty[$ on a

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= \Big|x\sin(1/x) - y\sin(1/y)\Big| \\
&\leq \Big|(x-y)\sin(1/x)\Big| + \Big|y\left(\sin(1/x)-\sin(1/y)\right)\Big| \\
&\leq |x-y| + y\Big|\sin(1/x)-\sin(1/y)\Big| \\
&\leq |x-y| + y\Big|2\sin\left(\frac{1/x-1/y}{2}\right)\cos\left(\frac{1/x+1/y}{2}\right)\Big| \\
&\leq |x-y| + 2y\left|\sin\left(\frac{y-x}{2xy}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2xy}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Puisque $|\sin z| \leq |z|$ et $|\cos z| \leq 1,\ \forall z \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y| + 2y\frac{|x-y|}{2xy} = |x-y|\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq 2|x-y|.$$

En posant $\delta_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$, on a

$$\text{si}\ \ x, y \in [1, \infty[,\ |x-y| \leq \delta_2 \text{ alors } |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

Enfin en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ on a

$$\text{si}\ \ x, y \in]0, \infty[,\ |x-y| \leq \delta \text{ alors } |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que si $x, y \in]0, \infty[$ vérifient $|x-y| \leq 1$, on a forcément ($x \in [0,2]$ et $y \in [0,2]$) ou bien ($x \in [1, \infty[$ et $y \in [1, \infty[$). En effet, supposons par l'absurde que $x \in [0,2] \setminus [1, \infty[$ et $y \in [1, \infty[\setminus [0,2]$. Ceci implique $x < 1$ et $y > 2$ et donc $|x-y| > 1$, ce qui est une contradiction.