ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 14 au 18 novembre 2011

Corrigé 9 du mercredi 16 novembre 2011

Exercice 1.

Soit $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in [0,1]$, $P_0(x) = 0$.

1.) Montrons que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1]$.

- Commençons par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1]$.

  Démonstration : Puisque $P_0(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$, on a $0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0,1]$. Supposons donc que pour $n \geq 0$ on ait
  $$0 \leq P_j(x) \leq \sqrt{x}, \qquad \forall x \in [0,1], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$
  et montrons que
  $$0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0,1].$$
  En utilisant la définition de P_{n+1} on a
  $$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right).$$
  Puisque par hypothèse de récurrence on a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0,1]$, les facteurs
  $$\sqrt{x} - P_n(x) \text{ et } \left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right),$$
  sont non négatifs pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$, ce qui montre que $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. De façon évidente, puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, on a $P_{n+1}(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$ qui découle de la définition de P_{n+1}.

  $\square$

- Puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0,1]$, on a $(x - P_n^2(x)) \geq 0$ et donc
  $$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \geq P_n(x),\ \forall x \in [0,1].$$
  Ainsi, la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante.

2.) Si $x \in [0,1]$ est fixé, la suite $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ est une suite numérique croissante et bornée par $\sqrt{x}$. Elle est donc convergente et on pose
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$
On obtient ainsi $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left(x - f^2(x)\right)$, ce qui implique $f^2(x) = x$ et donc $f(x) = \sqrt{x}$ (le signe $-$ est à exclure car $P_n \geq 0$).
Ainsi $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge ponctuellement vers la fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Le théorème de Dini permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = f$ uniformément sur $[0,1]$.

3.) La fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = |x|$ (fonction paire). Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$ uniformément sur $[0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x^2) = |x|$ uniformément sur $[-1,1]$ et $P_n(x^2)$ est un polynôme.

Exercice 2.

Soit $f_n : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x\,(1 + \sqrt[n]{nx})$. Alors $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $f(x) = 2x$.

1) Si $x \in [1,3]$ on a

$$f_n(x) = x\left(1 + \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\downarrow \atop 1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 2x.$$

2) On sait que la suite $\left(x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 0}$ est croissante et bornée par 3 (cf cours p.18).

$$x_n \leq 3 \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 3 \Rightarrow (1+n)^n \leq 3n^n \underset{\text{si } n\geq 3}{\leq} n\,n^n = n^{n+1}.$$

Ainsi donc,

$$(1+n)^{\frac{1}{n+1}} \leq n^{\frac{1}{n}} \qquad \forall n \geq 3.$$

D'autre part puisque $x^{\frac{1}{n+1}} \leq x^{\frac{1}{n}}$, $(f_n)_{n=3}^{\infty}$ est une suite décroissante de fonctions continues qui converge ponctuellement vers la fonction continue $f(x) = 2x$ lorsque $n \to \infty$. Le théorème de Dini permet de conclure que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f.

Remarque : On peut aussi remarquer que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions continues et décroissantes qui converge vers une fonction continue. Ainsi par le théorème de Dini (2e version) la convergence est uniforme.

Exercice 3.

Soient

- $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformément.
- $x_0 \in \mathbb{R}$, f_n et f sont définies au voisinage de x_0.
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f_n(x) = \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f(x) = \alpha$, i.e. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f_n(x)$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\text{si } x \in D,\ 0 < |x - x_0| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - \alpha| \leq \varepsilon.$$

- Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, il existe $n_0 > 0$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformément, il existe $N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in D$.
- Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f_N(x) = \alpha_N$, il existe $\delta = \delta(N) > 0$ tel que si $x \in D$, $0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a

$$|f_N(x) - \alpha_N| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Ainsi, lorsque $x \in D$, $0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a

$$|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \alpha_N| + |\alpha_N - \alpha| \leq \varepsilon.$$

□