Corrigé 10 du mercredi 23 novembre 2011

Exercice 1.

Soit α, β deux nombres positifs, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$f(x) = \mathcal{O}\big(|x-x_0|^\alpha\big) \text{ si } x \to x_0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = o\big(|x-x_0|^\beta\big) \text{ si } x \to x_0.$$

a) Trouvons γ tel que $f(x)+g(x) = \mathcal{O}\big(|x-x_0|^\gamma\big)$ si $x \to x_0$,
b) Trouvons ζ tel que $f(x)+g(x) = o\big(|x-x_0|^\zeta\big)$ si $x \to x_0$.

Pour ce faire, on traite séparément trois cas:

1) Si $\alpha = \beta$, on a l'existence de C_1 et $\delta_1 > 0$ tels que
$$|f(x)| \leq C_1 |x-x_0|^\alpha \text{ si } x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-x_0| \leq \delta_1$$
et puisque g est $o\big(|x-x_0|^\alpha\big)$ si $x \to x_0$, alors g est aussi $\mathcal{O}\big(|x-x_0|^\alpha\big)$ si $x \to x_0$. Ainsi on a l'existence de C_2 et $\delta_2 > 0$ tels que
$$|g(x)| \leq C_2 |x-x_0|^\alpha \text{ si } x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-x_0| \leq \delta_2.$$
En conclusion, si $x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-x_0| \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on a
$$|g(x)+f(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \big(C_1 + C_2\big)|x-x_0|^\alpha$$
et donc
$$f(x)+g(x) = \mathcal{O}\big(|x-x_0|^\alpha\big) \text{si } x \to x_0.$$
Dans ce cas, $\gamma = \alpha$.
D'autre part, si $0 < \epsilon < \alpha$, on a
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \frac{f(x)}{|x-x_0|^{\alpha-\epsilon}} = 0$$
et donc $f(x)+g(x) = o\big(|x-x_0|^{\alpha-\epsilon}\big)$ si $x \to x_0$. Dans ce cas, $\zeta = \alpha - \epsilon$ pour n'importe quel $\epsilon \in]0, \alpha[$.

<u>ATTENTION:!!</u> On ne peut pas prendre $\epsilon = 0$ car $f(x)$ n'est pas nécessairement $o\big(|x-x_0|^\alpha\big)$si $x \to x_0$.

2) Si $\alpha < \beta$, on a $f(x) = \mathcal{O}\big(|x-x_0|^\alpha\big)$si $x \to x_0$ et aussi $g(x) = \mathcal{O}\big(|x-x_0|^\beta\big) = \mathcal{O}\big(|x-x_0|^\alpha\big)$si $x \to x_0$.
Ainsi $\gamma = \alpha$.
Comme précédemment, on a $\zeta = \alpha - \epsilon$.

3) Si $\alpha > \beta$, on a dans ce cas
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\beta} \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} |x-x_0|^{\alpha-\beta} = 0.$$
Ainsi, $f(x)+g(x) = o\big(|x-x_0|^\beta\big)$si $x \to x_0$ et on a $\gamma = \zeta = \beta$.

Exercice 2.

Si $x \in]0,1]$, on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = 0$.

D'autre part, $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$.
Ainsi, $f' \in C^0([0,1])$ et donc $f \in C^1([0,1])$.
Si $x \in]0,1]$, on a $f''(x) = 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f''(x)$ n'existe pas. La fonction $f \notin C^2([0,1])$.
En conclusion, $f \in C^1([0,1])$, mais $f \notin C^m([0,1])$ avec $m \geq 2$.

Exercice 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ et soit $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in \mathbb{R}$, tel que $|\xi_x - a| < |x - a|$ et

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_x)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x).$$

Si x tend vers a, puisque

$$\lim_{\substack{\xi \to a \\ \neq}} f'(\xi) = \ell,$$

on aura

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(\xi_x) = \ell.$$

<u>Remarque</u>: Ici ξ_x doit être vu comme une fonction de x qui tend vers a lorsque x tend vers a.

Exercice 4.

On pose $p(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ et $h(x) = f(x) - p(x) - \dfrac{f(b) - p(b)}{(b-a)^2}(x - a)^2$. On a $h(a) = h(b) = 0$.
Par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h'(\xi) = 0$.
Calculons

$$h'(x) = f'(x) - p'(x) - 2\frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^2}(x - a),$$

on a donc $h'(a) = f'(a) - p'(a) = 0$.
En réutilisant le théorème de Rolle encore une fois sur h' on aura l'existence de $c \in]a, \xi[$ tel que $h''(c) = 0$.
Ainsi,

$$f''(c) - \underbrace{p''(c)}_{=0} - 2\frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(b) = p(b) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2.$$

Exercice 5.

Soit $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$. Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Démonstration :

- Puisque f est dérivable sur $]0, \infty[$, elle est continue.
- Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$, il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq \frac{\ell}{2} > 0$, $\forall x \geq M$. Ainsi f est croissante sur $]M, +\infty[$.

- Ab absurdo, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$, alors f est bornée sur $[M, +\infty[$ et on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in [M, +\infty[$, par le théorème des accroissements finis, il existe alors $\xi = \xi(x) \in]x, x+1[$ tel que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi).$$

- En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = \dfrac{\alpha - \alpha}{1} = \ell$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\ell > 0$.

$\square$