ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 20 au 23 septembre 2010

Série 1 du mercredi 21 septembre 2011

Exercice 1. Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 100 \cdot 2^{100}.$$

Indications:

1^o) Montrer que $S = \sum_{n=1}^{100} (n-1)2^n + \sum_{n=1}^{100} 2^n$.

2^o) Montrer que $S = 2S - 200 \cdot 2^{100} + \sum_{n=1}^{100} 2^n$.

3^o) Utiliser la relation $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$ on a la formule (**binôme de Newton**):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \qquad (\text{ convention } 0! = 1)$$

Indications:

1^o) Montrer que la formule est vraie pour $n = 1$.

2^o) Supposer que la formule est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, N$ et montrer qu'elle reste encore vraie pour $n = N + 1$, où $N \geq 1$ (**raisonnement par induction ou par récurrence**).

Exercice 3. Montrer que pout tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Indication: Utiliser l'exercice 2.