

Série 4 du mercredi 12 octobre 2011

Exercice 1.

On considère la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par

$$x_0 = 0, \quad x_{\frac{q(q-1)}{2} + p} = \frac{p}{q},$$

pour $1 \leq p \leq q$, $q = 1, 2, \dots$

- (1) Écrire les 20 premiers termes de cette suite.
- (2) Trouver tous les points d'accumulation de cette suite.

Exercice 2.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un **point d'accumulation** de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ si de celle-ci on peut extraire une sous-suite qui converge vers x .

Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée et désignons par E l'ensemble de ses points d'accumulation.

Montrer que

$$\sup E = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Indications

- 1.) Montrer que $E \neq \emptyset$.
- 2.) Si $\alpha = \sup E$, $\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, montrer que $\beta \leq \alpha$.
- 3.) Soit $\lambda \in E$, limite de la sous-suite $(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$; montrer que $\beta \geq \lambda$.