ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 17 au 21 octobre 2011

Série 5 du mercredi 19 octobre 2011

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

est une série convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

Exercice 2.

Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty\right)$$

Indication: Pour montrer que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < +\infty\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty\right),$$

commencer par montrer que la suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est bornée et utiliser le théorème 2.5 du cours (critère de comparaison).

Exercice 3.

Soient $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ deux suites de nombres réels positifs pour lesquelles il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Montrer que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Indication: montrer que pour tout $n > n_0$, $a_n \leq \beta b_n$ où $\beta = \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$.