

Série 6 du mercredi 26 octobre 2011

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire. Montrer que sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi impaire.

Exercice 2.

Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ dans les cas où $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont définis par:

- a) $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, $x_0 = 1$;
b) $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, $x_0 = -1$;
c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $x_0 = 0$;
d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $x_0 = 1$.

Exercice 3.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par:

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\},$$

et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in A, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \notin (\mathbb{Q} \cup A). \end{cases}$$

- a) Montrer que f admet une limite en tous les points de A et calculer la valeur de cette limite.
b) Est-ce que f admet une limite en $x_0 = 0$? Si oui, calculer cette limite; sinon, justifier votre réponse.
c) Trouver les points de \mathbb{R} où f n'a pas de limite.