ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1ère année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 31 octobre au 4 novembre 2011

Série 7 du mercredi 2 novembre 2011

Exercice 1.

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f a la propriété suivante: pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que

$$a_n \neq a, \;\; f(a_n) \neq \alpha, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \text{et} \;\; \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Démontrer que s'il existe un nombre réel ℓ et une fonction $\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient pour $x \in D$

$$0 < |x - a| \leq \delta(\epsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \leq \epsilon,$$

alors nécessairement $\lim\limits_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}} \delta(\epsilon) = 0$.

Indication: Supposer par l'absurde que $\delta(\epsilon)$ ne tend pas vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro.

Exercice 2.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout triplet $x \leq y \leq z$ de I:

$$\left(f(y) - f(x)\right)\left(f(y) - f(z)\right) \leq 0.$$

Montrer que f est monotone.

Indications:

1^o) Démontrer la proposition en supposant que $I = [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On étudiera successivement les cas où $f(a) = f(b), f(a) < f(b)$ et $f(a) > f(b)$.

2^o) Démontrer la proposition en supposant que I est un intervalle quelconque. On supposera par l'absurde que si f n'est pas monotone sur I, alors il existe $a_1 < b_1, a_2 < b_2$, quatre éléments de I, tels que $f(a_1) < f(b_1)$ et $f(a_2) > f(b_2)$.

Exercice 3.

Soit $I =]0, \infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. Démontrer que f est uniformément continue sur I.