ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1ère année
Prof. J. Rappaz

Semaine du 21 au 25 novembre 2011

Série 10 du mercredi 23 novembre 2011

Exercice 1.

Soit α, β deux nombres positifs, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$f(x) = \mathcal{O}\big(|x - x_0|^\alpha\big) \text{ si } x \to x_0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = o\big(|x - x_0|^\beta\big) \text{ si } x \to x_0.$$

a) Trouver γ tel que $f(x) + g(x) = \mathcal{O}\big(|x - x_0|^\gamma\big)$ si $x \to x_0$,
b) Trouver ζ tel que $f(x) + g(x) = o\big(|x - x_0|^\zeta\big)$ si $x \to x_0$.

Exercice 2.

On considère $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in]0, 1],\ f(0) = 0.$$

Pour quel entier positif m a-t-on $f \in C^m([0, 1])$?

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe, alors $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$.

Exercice 4.

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1([a, b])$, deux fois dérivable sur $]a, b[$.
Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2} f''(c)(b - a)^2.$$

Exercice 5. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \ell > 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.