■ Exercice d'analyse n° 1 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

■ Exercice d'analyse n° 2 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

■ Exercice d'analyse n° 3 , 4ème série, Recueil 2003

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

■ Exercice d'analyse n° 4 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

■ Exercice d'analyse n° 5 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe. *Indication* : étudier

$$E = \{x \in [0,1] | \forall t \in [0,x], f(t) > t\}.$$

■ Exercice d'analyse n° 6 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f^2 = f (*)$. On note $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \emptyset$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Trouver toutes les solutions de $(*)$.

- Exercice d'analyse n° 7 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

1. Montrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$
Pour cela, on pourra montrer que $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a,b[$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$. *Indication :* Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.
3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que
$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

- Exercice d'analyse n° 8 , 4ème série, Recueil 2003

Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

- Exercice d'analyse n° 9 , 4ème série, Recueil 2003

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\quad b)\ f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

- Exercice d'analyse n° 10 , 4ème série, Recueil 2003

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

- Exercice d'analyse n° 11 , 4ème série, Recueil 2003

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ;\quad g(x) = \sqrt{x^2-2\,x-5}\ ;\quad h(x) = \ln(4\,x+3)$$

- Exercice d'analyse n° 12, 4ème série, Recueil 2003

Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

- Exercice d'analyse n° 13, Complément 4ème série, Recueil 2003

Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

- Exercice d'analyse n° 14, Complément 4ème série, Recueil 2003

Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

- Exercice d'analyse n° 15, Complément 4ème série, Recueil 2003

Limite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$

Équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}$

Limite en 0 de $\dfrac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$

Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan(x+\dfrac{\pi}{4})$

Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{(4\,x-\pi)\tan(x)}$

Équivalent en 0 de $\dfrac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$

Équivalent en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\left(\tan(2\,x)+\tan(x+\dfrac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\dfrac{\pi}{4})\right)^2$

Limite en 0 de $x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$

Limite en $\dfrac{1}{2}$ de $\left(2\,x^2-3\,x+1\right)\tan(\pi\,x)$

Limite en 0 de $\dfrac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$

Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\dfrac{x}{x+1})$