■ Devoir n° 7 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f$ définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. $f$ est-elle continue sur son ensemble de définition ?

2. Déterminez en fonction de $a$ la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers 1 (si cette limite existe). Même chose en $-1$. (On précisera éventuellement les limites à gauche et à droite si elles diffèrent.)
3. Déterminez en fonction de $a$ si $f$ peut être prolongée par continuité en 1 ? En $-1$ ?

■ Devoir n° 8 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f$ définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\}, |f(x)| \leqslant k|x|.$$

Expliquez par un dessin ce que signifie cette condition sur $f$.
Montrez que $f$ continue en 0 si et seulement si $f(0) = 0$.

■ Devoir n° 9 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f$ définie par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ où $E$ est la fonction partie entière. Etudiez la continuité de $f$ en chaque point de son ensemble de définition.

■ Devoir n° 10 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Montrer que $f$ admet au moins une racine.
Application : montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

■ Exercice n° 7 d'analyse, Série d'Orsay

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle indiqué :

1. $x^5 - x^4 + 1 = 0$ sur $I = [-1, 0]$
2. $\sin(x) + 1 = x$ sur $I = ]\frac{\pi}{2}, \pi[$

■ Exercice n° 8 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et ne s'annulant pas sur $I$. Montrer que : $\forall x \in I, f(x) > 0$ ou $\forall x \in I, f(x) < 0$
Dans le cas où $I = [a, b]$ et $\forall x \in I, f(x) > 0$, montrer que :
$\exists \lambda > 0, \forall x \in I, f(x) \geqslant \lambda$

■ Exercice n° 9 d'analyse, Série d'Orsay

Trouver dans chacun des cas une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0)f(1) < 0$ et :

1. n'ayant qu'une seule racine en $x = \frac{1}{2}$
2. ayant 2 racines distinctes
3. ayant une infinité de racines

Un dessin du graphe de la fonction suffira.

■ Exercice n° 10 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que $f$ admat un point fixe, c'est-à-dire $\exists x \in [0, 1], f(x) = x$. Si on suppose de plus que $f$ est décroissante, montrer que ce point fixe est unique. Qu'en est-il si $f$ n'est pas décroissante ?

■ Exercice n° 11 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que $f$ est bornée et atteint ses bornes une infinité de fois.

■ Exercice n° 12 d'analyse, Série d'Orsay

Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ sont continu étudier si on peut les prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
2. $g(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x}$
3. $h(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$
4. $l(x) = \frac{|sin(x)|}{x}$
5. $m(x) = \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{x}$

■ Exercice n° 13 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x^2 + b$ si $x \leqslant 0$
2. $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ si $x > 0$

Etudiez la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres $a$ et $b$.