Réponse Exercice n° 7 d'analyse, Série d'Orsay

1. $f(x) = x^5 - x^4 + 1$. $f(-1) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, f c
par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in [-1, 0]$ tel que $f(x_0$
2. $g(x) = \sin(x)+1-x$. $g(\pi/2) = 2-\frac{\pi}{2} > 0$, $g(\pi) = 1-\pi < 0$, g continue donc pa
des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $g(x_0) = 0$, donc $\sin(x$

Réponse Exercice n° 8 d'analyse, Série d'Orsay

Preuve par l'absurde : on suppose $\exists x_1 \in I, f(x_1) \leqslant 0$ et $\exists x_2 \in I$
f ne s'annule pas donc $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. Si $x_1 < x_2$ alors par le théorème
intermédiaires il existe $y \in [x_1, x_2] \subset I$ tel que $f(y) = 0$. Si $x_2 < x_1$ alors par le tl
valeurs intermédiaires il existe $y \in [x_2, x_1] \subset I$ tel que $f(y) = 0$. On obtient une co
Donc $\forall x \in I, f(x) > 0$ ou $\forall x \in I, f(x) < 0$.
Si $I = [a, b]$ et $\forall x \in I, f(x) > 0$, soit $\lambda = \min\{f(x); x \in I\}$ (f est continue sur
fermé borné donc elle atteint ses bornes). Il existe $y \in I$ tel que $f(y) = \lambda$ donc λ
définition de λ, pour tout $x \in I, f(x) \geqslant f(y) = \lambda$.

Réponse Exercice n° 9 d'analyse, Série d'Orsay

1. $f(x) = -1 + 2x$. unique racine $\frac{1}{2}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
2. $f(x) = -1 + 4x$ pour $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = 3 - 4x$ pour $x \in]1/2, 3/4]$, $f(x) = -$
$x \in]3/4, 1]$. f est continue (les morceaux se recollent), f a exactement 2 raci
$f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
3. $f(x) = -1 + 4x$ pour $x \in [0, 1/4]$, $f(x) = 0$ pour $]1/4, 3/4]$, $f(x) = -3$
$x \in]3/4, 1]$. f est continue, tous les points de $[1/4, 3/4]$ sont des racines de f,
$f(1) = 1$.

Réponse Exercice n° 10 d'analyse, Série d'Orsay

' Soit $g(x) = f(x) - x$. $f(0) \in [0,1]$ donc $f(0) \geqslant 0$ et $g(0) \geqslant 0$. donc $f(1) \leqslant 1$ et $g(1) \leqslant 0$. La fonction g est continue. Si $g(0) = 0$ ou $g(1) < 1$ alo point fixe de f. Si $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$ alors par le théorème des valeurs intermédia $x \in]0,1[$ tel que $g(x) = 0$, d'où $f(x) = x$.

Si f est décroissante, soit x tel que $f(x) = x$. Si $x' < x$ alors $f(x') \geqslant f(x) =$ $f(x') \neq x'$. Si $x' > x$ alors $f(x') \leqslant f(x) = x < x'$ donc $f(x') \neq x'$. Donc x est l' fixe de f.

Si f n'est pas décroissante, tous les cas sont possibles (une ou plusieurs racines, ou

■ Réponse Exercice n° 11 d'analyse, Série d'Orsay

Soit T la période de f : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. On en dé $\mathbb{N}, f(x+nT) = f(x)$ (récurrence), puis $\forall n \in \mathbb{Z}, f(x+nT) = f(x)$ (si $n = -k$ $y = x - kT$, on a $f(y+kT) = f(y)$, c'est-à-dire $f(x) = f(x+nT)$).

Soit $m = \min\{f(x); x \in [0,T]\}$, $M = \max\{f(x); x \in [0,T]\}$ et $y_1, y_2 \in [0,T]$ tels qu $f(y_2) = M$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a $0 \leqslant \frac{x}{T} - n < 1$ donc $0 \leqslant x - nT < T$. Soit Par ce qui précède, $f(x) = f(y)$ et comme $y \in [0,T]$ on a $m \leqslant f(y) \leqslant M$, donc m Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(y_1 + nT) = m$ et $f(y_2 + nT$ f atteint ses bornes une infinité de fois.

■ Réponse Exercice n° 12 d'analyse, Série d'Orsay

' • $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, sin est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continu composition. Soit $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ et $y_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k$ tout $k \in \mathbb{N}*$ $f(x_k) = 0$, $f(y_k) = 1$.

Supposons que f ait une limite en 0, qu'on appelle l. Soit $\varepsilon = 1/4$. $\exists \alpha > 0$, $\alpha \Rightarrow |f(x) - l| < 1/4$. Si k est assez grand alors $|x_k| < \alpha$ donc $|0 - l| < 1/4$, $-1/4 < l < 1/4$, et aussi $|y_k| < \alpha$ donc $|1 - l| < 1/4$, c'est-à-dire $3/4 < l < 5/4$. Co Donc f n'a pas de limite en 0.

• $(1+x)^3-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions continues, $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit). $g(x)=\frac{x^3+3x^2+3x}{x}=x^2+3x+3$ donc l
g est prolongeable en 0 en posant $g(0)=3$.

• $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, $\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc h est continue sur $\mathbb{R}^*$ (co produit).
$h(x)=\frac{\sin x}{x}\times x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $-x\leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant x$ donc par le théorème de
$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$. h est prolongeable par continuité en posan

• $|x|$ et $\sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc l est continue sur $\mathbb{R}$ composition).
Si $x\in]0,\pi/2[$ alors $l(x)=\frac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} l(x)=1$. Si $x\in]-\pi/2,0[$ alors $l(x)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} l(x)=-1$. Donc l n'est pas prolongeable par continuité en 0.

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $1+\sin x\geqslant 0$ et $1-\sin x\geqslant 0$. $\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{x}$ est continue
$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et m est continue sur $\mathbb{R}^*$.
$m(x)=\frac{2\sin x}{x(\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-\sin x})}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} m(x)=2\times 1\times\dfrac{1}{2}=1$. m est prolongeable par

■ Réponse Exercice n° 13 d'analyse, Série d'Orsay

f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Il reste à étudier la c 0.
$f(x)=x^2+b$ si $x\leqslant 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b=f(0)$.
$f(x)=\frac{\sin(ax)}{x}$ si $x>0$. Si $a\neq 0$ alors $f(x)=a\times\frac{\sin(ax)}{ax}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a$. Si $a=0$ al
pour tout $x>0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a$.
Conclusion : f est continue si et seulement si $a=b$.