- Réponse exercice n° 1 de l'examen d'analyse partiel, Novembre 1998, Recueil 2003

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geqslant \big|\,|x|-|y|\,\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$: $\big|\,|f(x)|-|f(a)|\,\big| \leqslant |f(x)-f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement en réutilisant l'argument donné ci dessus, on peut conclure : La fonction $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

- Réponse exercice n° 2 de l'examen d'analyse partiel, Novembre 1998, Recueil 2003

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leqslant |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1,1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant) et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leqslant 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geqslant 1$. Conclusion :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$