

■ Réponse devoir n° 6 d'analyse, Série d'Orsay

1. Soit $x > 0$. $\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2} \sin(\frac{1}{x})$ est bien défini donc on peut s'intéresser à la limite en $+\infty$ et $\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2} \sin(\frac{1}{x}) = \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2} \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x}) = \frac{x^3+2x^2+1}{4x^3+3x^2+2x} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^3(4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.
Or, $\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand x tend vers $+\infty$.

D'autre part, $X = \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et $\frac{\sin(X)}{X}$ tend vers 1 quand X tend vers 0 donc par composition de limites $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2} \sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{4}$.

2. Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$. Alors $\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)}$ est bien défini donc on peut s'intéresser à la limite en 0 et $\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{2}{1-\cos(x)^2} - \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{2-(1+\cos(x))}{1-\cos(x)^2} = \frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{1}{2}$ car \cos est continue en 0 et $\cos(0) = 1$.

■ Réponse devoir n° 7 d'analyse, Série d'Orsay

Soit f définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. $f(x)$ est défini si et seulement si $1-x \neq 0$ et $1-x^2 \neq 0$ donc l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. f est une somme d'inverses de fonctions continues ne pas sur D_f donc f est continue sur D_f .

2. Soit $x \in D_f$. $f(x) = \frac{a-2+ax}{(1+x)(1-x)}$.
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a-2+ax}{1-x} = -1$. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1+x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$
- Si $a = 1$, $f(x) = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}$.
Si $a \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{a-2+ax}{1+x} = a-1$. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$
Si $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$
Si $a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

3. - f n'a pas de limite finie en -1 donc f n'est pas prolongeable par continuité en -1 quelle que soit la valeur de a .

- Si $a \neq 1$, f n'a pas de limite finie en 1 donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

Si $a = 1$, on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$.

■ Réponse devoir n° 8 d'analyse, Série d'Orsay

- La condition sur f signifie que son graphe privé du point $(0, f(0))$ est compris entre les droites $y = kx$ et $y = -kx$. Comme f est enfermée dans cet entonnoir, on devine que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
- $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, 0 \leq |f(x)| \leq k|x|$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Or, f continue en 0 ssi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Donc f continue en 0 ssi $0 = f(0)$.

■ Réponse devoir n° 9 d'analyse, Série d'Orsay

- Si $x > 1, 0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $E(\frac{1}{x}) = 0$ donc $f(x) = 0$ donc f est nulle donc continue sur $]1, +\infty[$.
- Si $0 < x \leq 1, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ donc $f(x) = nx$ (car $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ donc $E(\frac{1}{x}) = n$) donc f est continue sur chacun des intervalles $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$. En particulier, on a $f(\frac{1}{n}) = 1$.
- Si $x > 1, f(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$ donc f n'est pas continue en 1.
- Si $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, alors $f(x) = nx$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n+1}^+} f(x) = \frac{n}{n+1} \neq 1 = f(\frac{1}{n+1})$ donc f n'est pas continue en $\frac{1}{n+1}$.
- Le même genre de travail montre que f est continue sur $] -\infty, -1[$, sur $] -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} [$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais qu'elle n'est pas continue en $-\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- On peut prolonger f par continuité en 0. En effet, si $x \neq 0, E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x})+1$ par définition de la partie entière donc $\frac{1}{x}-1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$ donc $1-x < f(x) \leq 1$ si $x > 0$ ou $1-x > f(x) \geq 1$ si $x < 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.

■ Réponse devoir n° 10 d'analyse, Série d'Orsay

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\exists B > 0, \forall x \geq B, f(x) \geq 1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ donc $\exists A < 0, \forall x \leq A, f(x) \leq -1$
- $A < B, f$ continue sur $[A, B], f(A) < 0$ et $f(B) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]A, B[, f(c) = 0$.
- Quitte à changer le polynôme P en $-P, P$ satisfait les conditions précédentes, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ (car il est de degré impair) et P est continu sur \mathbb{R} donc il admet une racine réelle.