■ Exercice n° 14 d'analyse, Série d'Orsay

Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :

$$f(x) = \sqrt{1 + (x \cos x)^2}, \qquad g(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \qquad k(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}.$$

■ Exercice n° 15 d'analyse, Série d'Orsay

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \mapsto \sin(f(x^2))$.

2. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

■ Exercice n° 16 d'analyse, Série d'Orsay

En utilisant la définition, calculer la dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2$.

■ Exercice n° 17 d'analyse, Série d'Orsay

Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

■ Exercice n° 18 d'analyse, Série d'Orsay

La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

■ Exercice n° 19 d'analyse, Série d'Orsay

Soit a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = a(x^2 - 1) + b \text{ si } x > 1.$$

Déterminer a et b de manière à ce que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Exercice n° 20 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction dérivée d'ordre n de $f(x) = \sin x$.

- Exercice n° 21 d'analyse, Série d'Orsay

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

- Exercice n° 22 d'analyse, Série d'Orsay

1. Montrer que l'on a $x \cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto laystyle\dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

- Exercice n° 23 d'analyse, Série d'Orsay

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1) \sin x$
2. Montrer que l'équation $(x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

- Exercice n° 24 d'analyse, Série d'Orsay

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$ s'annulant en 3 points de $]0, 1[$. Montrer qu'il existe un point x_0 de $]0, 1[$ tel que $f''(x_0) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, 1[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]0, 1[$. Montrer qu'il existe un point x_0 de $]0, 1[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

- Exercice n° 25 d'analyse, Série d'Orsay

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ et $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

- Exercice n° 26 d'analyse, Série d'Orsay

En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x > 0$ et $x < 0$ démontrer que :

1. pour tout réel x on a $e^x \geqslant 1 + x$;
2. pour tout $x > -1$ on a $\ln(1 + x) \leqslant x$.

- Exercice n° 27 d'analyse, Série d'Orsay

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que $\forall x > 0, \quad \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x})^x$.

- Exercice n° 28 d'analyse, Série d'Orsay

A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} \right)$.

- Exercice n° 29 d'analyse, Série d'Orsay

Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

- Exercice n° 30 d'analyse, Série d'Orsay

1. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 0 pour la fo
2. Montrer que l'on a $|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$ pour tout réel x.

- Exercice n° 31 d'analyse, Série d'Orsay

1. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 7 et au point 0 pour la fonction cosinus.
2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 1 pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

- Exercice n° 32 d'analyse, Série d'Orsay

Écrire la formule de Taylor à l'ordre 1, 2 et 3 pour le polynôme $2+3x-4x^2+2x^3$ au point $x=1$.

- Exercice n° 33 d'analyse, Série d'Orsay

Montrer les encadrements suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}e^{|x|}$.
2. $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

- Exercice n° 34 d'analyse, Série d'Orsay

En écrivant la formule de Taylor à l'ordre n au point 0 pour la fonction $x \mapsto e^x$ montrer que l'on a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n \qquad \text{où } |r_n| < \frac{e}{(n+1)!}.$$

- Exercice n° 35 d'analyse, Série d'Orsay

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $]a-\delta, a+\delta[$, $\delta > 0$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$