■ Réponse Exercice n° 14 d'analyse, Série d'Orsay

• $1 + (x\cos x)^2 > 0$ pour tout x donc $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.
$f'(x) = \dfrac{(x^2\cos^2 x)'}{2\sqrt{1+x^2\cos^2 x}} = \dfrac{2x\cos^2 x - 2x^2\cos x\sin x}{2\sqrt{1+x^2\cos^2 x}} = \dfrac{x\cos x(\cos x - x\sin x)}{\sqrt{1+x^2\cos^2 x}}$.
• Il faut $x \neq 0$ sinon $\frac{1}{x}$ non défini, et $\exp(\frac{1}{x}) \neq 1$ (dénominateur non nul) c'est-à-
qui est toujours vrai. D'où $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}^*$. $(\exp(\frac{1}{x}))' = -\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})$ d'où
$g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})(\exp(\frac{1}{x}) - 1) + \frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})(\exp(\frac{1}{x}) + 1)}{(\exp(\frac{1}{x}) - 1)^2} = \dfrac{2\exp(\frac{1}{x})}{x^2(\exp(\frac{1}{x}) - 1)^2}$.
• Il faut $\tan x > 0$ d'où $D_h = D_{h'} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, k\pi + \pi/2[$. $h'(x) = \dfrac{(\tan x)'}{\tan x} = -$
$\dfrac{1}{\cos x \sin x}$.
• $D_k = D_{k'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $k'(x) = 4x^3(1+x)^{-4} - 4x^4(1+x)^{-5} = \dfrac{4x^3[(1+x) - x]}{(1+x)^5}$

■ Réponse Exercice n° 15 d'analyse, Série d'Orsay

1. $(\sin(f(x)^2))' = 2f(x)f'(x)\cos(f(x))$. $(\sin(f(x^2)))' = 2x$
2. Si $f(x) > 0$ alors $\ln|f(x)| = \ln(f(x))$ d'où $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Si $f(x) < 0$ alors $\ln(-f(x))$ d'où $(\ln|f(x)|)' = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Conclusion : dans les 2 cas, $(\ln|f(x$

■ Réponse Exercice n° 16 d'analyse, Série d'Orsay

$f(2) = 1$, $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2$ donc $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) -}{x -}$
$f'(2) = 0$.

■ Réponse Exercice n° 17 d'analyse, Série d'Orsay

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $1+|x|$ es
positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f, g, h sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et dérivables su
produit et quotient de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité en 0. • $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f}{}$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{-x\to 0^+} x = 0$ donc $f'(0)$ existe et vaut 0.

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+|x|} = 0$ donc $g'(0)$ existe et vaut 0.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1.$
pas dérivable en 0 ($h'_g(0) = 1$ et $h'_d(0) = -1$).

■ Réponse Exercice n° 18 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $y = \sqrt{x}$. $\frac{\cos\sqrt{x}-\cos(\sqrt{0})}{x-0} = \frac{\cos y - 1}{y^2}$, qui a $-\frac{1}{2}$ pour limite quand
$\cos\sqrt{x}$ est dérivable en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$.

■ Réponse Exercice n° 19 d'analyse, Série d'Orsay

Il faut d'abord que f soit continue. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}$
faut donc $b = 1$. Ensuite il faut que les dérivées à droite et à gauche coïncident : f'
$x < 1$ d'où $f'_g(1) = \frac{1}{2}$, et $f'(x) = 2ax$ si $x > 1$ d'où $f'_d(1) = 2a$. Il faut donc $a = 1$.
si $a = b = 1$ alors f est $mathcalC^1$.

■ Réponse Exercice n° 20 d'analyse, Série d'Orsay

On a $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) =$ s
Une récurrence immédiate montre que $f^{(4k)}(x) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc
$n = 4k + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 3$ on a $f^{(n)}(x) = f^{(r)}(x)$ (déjà calculée).

■ Réponse Exercice n° 21 d'analyse, Série d'Orsay

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2-1)(x^2+1)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ou $x < -1$. On calcule les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
Tableau de variation :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) = 0$ a donc exactement 3 solutions (dans $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$).

■ Réponse Exercice n° 22 d'analyse, Série d'Orsay

1. Soit $f(x) = x\cos x - \sin x$. $f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -$ pour tout $x \in]0,\pi[$. Donc f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Or $f(0$ $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0,\pi[$.
2. Soit $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. $g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}$. Par a) $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]($ est strictement décroissante sur $]0,\pi]$.
3. On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) =$ g est continue sur $[0,\pi]$ et strictement décroissante sur $]0,\pi]$ par b), g est dé croissante sur $[0,\pi]$, donc $g(0) > g(x) > g(\pi/2)$ pour tout $x \in]0,\pi/2[$, c'est-à $\frac{\sin x}{x} < 1$. Comme $x > 0$ on obtient $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ pour tout $x \in]0,\pi/2[$.

■ Réponse Exercice n° 23 d'analyse, Série d'Orsay

1. Soit $f(x) = (x^2+1)\sin x$. $f'(x) = 2x\sin x + (x^2+1)\cos x$.
2. On a $f(0) = f(\pi) = 0$ donc par le théorème de Rolle il existe $x \in]0,\pi[$ tel que $f'(x) = 0$.

■ Réponse Exercice n° 24 d'analyse, Série d'Orsay

1. Soit $a_0 < a_1 < a_2$ dans $]0,1[$ tels que $f(a_i) = 0$. Par le théorèm il existe $b_0 \in]a_0,a_1[$ et $b_1 \in]a_1,a_2[$ tels que $f'(b_0) = f'(b_1) = 0$. En appliquant le de Rolle à f' on trouve qu'il existe $c_0 \in]b_0,b_1[$ tel que $f''(c_0) = 0$.

2. On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est le théorème de Rolle, p c'est a). On suppose que c'est vrai pour n pour toute fonction et on considère $\mathcal{C}^{n+1}$ avec $n+2$ zéros dans $]0,1[$. En appliquant Rolle à f on trouve que f' dans $]0,1[$. Comme f' est $\mathcal{C}^n$ on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence $x_0 \in]0,1[$ tel que $(f')^{(n)}(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f^{(n+1)}(x_0) = 0$. Conclusion [...]

■ Réponse Exercice n° 25 d'analyse, Série d'Orsay

On a $(\sin x)' = \cos x$ et $|\cos x| \leqslant 1$ pour tout $x \in R$. Par l'inégalité des accroissements finis on a $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
De même, $(\cos x)' = -\sin x$ et $|-\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc par l'inégalité des accroissements finis on a $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

■ Réponse Exercice n° 26 d'analyse, Série d'Orsay

1. On a $(e^x)' = e^x$. Soit $x > 0$. Par le théorème des accroissen existe $c \in [0, x]$ tel que $e^x - e^0 = (x - 0)e^c$ donc $e^x = xe^c + 1 \geqslant x + 1$ (car $e^c \geqslant$ croissance de e^x). De même si $x < 0$ il existe $c \in [x, 0]$ tel que $e^0 - e^x = (0$ $e^x = xe^c + 1 \geqslant x + 1$ (car $e^c \leqslant e^0 = 1$ par croissance et $x < 0$). Pour $x =$ $e^x = x + 1$. Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
2. Soit $f(x) = \ln(1+x)$. On a $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ (décroissante sur $]-1, +\infty$ 0. Par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f$ donc $f(x) \leqslant xf'(0) = x$. Si $-1 < x < 0$, il existe $c \in]x, 0[$ tel que $f(0) - f(x) =$ d'où $f(x) = xf'(c) \leqslant xf'(0) = x$ (car f' décroissante et $x < 0$). L'inégalité pour $x = 0$, donc : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

■ Réponse Exercice n° 27 d'analyse, Série d'Orsay

1. Soit $f(y) = \ln(y)$. On a $f'(y) = \frac{1}{y}$, décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. S Par le théorème des accroissements finis sur $[x, x + 1]$ il existe $c \in]x, x +$ $f(x + 1) - f(x) = (x + 1 - x)f'(c) = f'(c)$. Donc $\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. Par (1) on a $\frac{1}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} < \sqrt{x}(\ln(x + 1) - \ln(x)) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc par le théorème des g
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln(x + 1) - \ln(x)) = 0$.
De même, on a $\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} < x(\ln(x + 1) - \ln(x)) < 1$ donc par le théorème des gend
$\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln(x)) = 1$.
3. $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln \frac{x+1}{x} = x(\ln(x + 1) - \ln x)$. Par b) ceci a pour l $+\infty$. Par composition de limite (en prenant l'exponentielle) on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \Big(1$ $e^1 = e$.
4. On a $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = x(\ln(x - 1) - ln(x))$. En utilisant a) avec $x - 1$ on ob $x(\ln(x) - \ln(x - 1)) < \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x - 1) - \ln(x)) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\Big(1 -$

■ Réponse Exercice n° 28 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) =$
applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$ (avec $x > 0$) et on
existe $c \in [x, x+1]$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c)$. D'où $x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{x^2}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$
$0 < x \leqslant c \leqslant x+1$ d'où $0 < \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ et $0 < e^{\frac{1}{x+1}} \leqslant e^{\frac{1}{c}} \leqslant e^{\frac{1}{x}}$ (car $t \mapsto e^t$ est
donc
$$\frac{x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}} \leqslant -x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) \leqslant e^{\frac{1}{x}}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = e^0 = 1$ on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \Big(e$
-1.

■ Réponse Exercice n° 29 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $f(x) = x^\alpha$. $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$. On applique le théorèm
sements finis à f sur $[n, n+1]$ et on utilise la décroissance de f' pour obtenir
$(n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
On somme ces inégalités entre $n = 1$ et $n = N$ en l'appliquant à $\beta = 1 - \alpha \in]0, 1[$
$$\beta \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^{1-\beta}} \leqslant (N+1)^\beta - 1 \leqslant \beta \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\beta}}.$$
On a $\beta > 0$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)^\beta - 1 = +\infty$. Comme $1 - \beta = \alpha$, on en déduit $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum$

■ Réponse Exercice n° 30 d'analyse, Série d'Orsay

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(c)$ avec $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$ (car $\sin 0 = 0$
$\cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$ et $(\sin x)''' = -\cos x$).
2. Par (1) pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x - x| = \frac{|x|^3}{6}|\cos c| \leqslant \frac{|x|^3}{6}|$.

■ Réponse Exercice n° 31 d'analyse, Série d'Orsay

1. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\cos(c)$ avec $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $f(1) = 1$. $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$. $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f''(1$
$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. D'où $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16}c^{-5/2}$ avec $c \in]1, x[$ ou $c \in$

- Réponse Exercice n° 32 d'analyse, Série d'Orsay

$P(x) = 2 + 3x - 4x^2 + 2x^3$, $P(1) = 3$. $P'(x) = 3 - 8x + 6x$
$P''(x) = -8 + 12x$, $P''(1) = 4$. $P^{(3)}(x) = 12$. $P^{(4)}(x) = 0$. D'où
- ordre 1 : $P(x) = 3 + (x-1) + (x-1)^2(-4 + 6c)$ avec $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$.
- ordre 2 : $P(x) = 3 + (x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3$ (car $P^{(3)}(c) = 12$).
- ordre 3 : $P(x) = 3 + (x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3$ (car $P^{(4)}(c) = 0$).

- Réponse Exercice n° 33 d'analyse, Série d'Orsay

1. Taylor en 0 à l'ordre 1 pour e^x : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^c$ avec $c \in]0,$
et $c \in]x, 0[$ si $x < 0$ (et n'importe quel c pour $x = 0$). Dans tous les cas on pe
$c \leqslant |x|$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2}e^c \geqslant 0$, d'où $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.
2. Taylor en 0 à l'ordre 3 pour $\ln(1+x)$ $(x > 0)$: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\frac{1}{(1+c)^3}$ avec
On a $0 < \frac{x^3}{3}\frac{1}{(1+c)^3} < \frac{x^3}{3}$ car $1 + c > 1$ d'où : $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x -$

- Réponse Exercice n° 34 d'analyse, Série d'Orsay

Soit $x > 0$. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$ avec $c \in]0, x[$. On
et on pose $r_n = \frac{1}{(n+1)!}e^c$. Alors $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$ avec $0 < r_n < \frac{e}{(n+1)!}$.

- Réponse Exercice n° 35 d'analyse, Série d'Orsay

On applique la formule de Taylor à f en a à l'ordre 2 avec $|h| <$
il existe $c, d \in]a-h, a+h[$ (ou $]a+h, a-h[$ si $h < 0$) tels que $f(a+h) = f(a) + hf'$
et $f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(d)$. D'où $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = \frac{\frac{h^2}{2}(f''(c)+f''(d))}{h^2} =$
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f'' est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-a| < \alpha \Rightarrow |f''(x)$ -
On en déduit que si $|h| < \alpha$ alors $\frac{f''(c)+f''(d)}{2} - f''(a)| < \varepsilon$ (car $|c-a| < |h|$ et $|d$
Donc :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ |h| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} - f''(a)\right| < \varepsilon.$
C'est-à-dire $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a).$