■ Devoir d'analyse n° 11, Série d'Orsay

Soit a, b, c trois nombres réels. On définit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = ax^2 + bx + x$ si $x \geqslant 0$. À quelle condition sur a, b, c la fonction f est-elle de classe C^2 ? f peut-elle être de classe C^3 ?

■ Devoir d'analyse n° 12, Série d'Orsay

On définit l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Etudier la dérivabilité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

■ Devoir d'analyse n° 13, Série d'Orsay

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.
3. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$?

■ Devoir d'analyse n° 14, Série d'Orsay

Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leqslant \sqrt{1+2x} \leqslant 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.$$

■ Devoir d'analyse n° 15, Série d'Orsay

On considère les fonctions $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

1. Donner les domaines de définition et de dérivabilité de f et g. Calculer f' et g'. D les extrema locaux de f et g. Existe-t-il des extrema globaux ?
2. Déterminer les asymptotes aux graphes de f et g.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f et g sont convexes, concaves, trouver d'inflexion.
4. Tracer les graphes de f et g.