■ Exercice d'analyse n° 1, 6ème série, Recueil 2003

Construire la courbe paramétrée $C \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+\lambda \cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1+\lambda \cos t} \end{cases}$ où λ est un p
partenant à $[0, 1[$.
Calculer l'aire S limitée par C de deux façons :
– En se ramenant au calcul de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\lambda \cos t)^2}$.
– En reconnaissant la nature géométrique de C.

■ Exercice d'analyse n° 2, 6ème série, Recueil 2003

Représenter la courbe définie par son équation polaire $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.
longueur L et les aires A_1 et A_2 limitées par les deux boucles qu'elle forme.

■ Exercice d'analyse n° 3, 6ème série, Recueil 2003

On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon r autour d'une droite de son plan passant à distance R de son centre (on suppose $r < R$). Calculer l'aire A du tore, et son volume V.

■ Exercice d'analyse n° 4, 6ème série, Recueil 2003

On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$
Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

■ Exercice d'analyse n° 5, 6ème série, Recueil 2003

On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y & = & r\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{array}\right.$$

Représenter la courbe pour $n = 1, 2, 3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

- Exercice d'analyse n° 6, 6ème série, Recueil 2003

Soit C un cercle fixe de rayon R. Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C. Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ. Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & R(\cos t + \sin^2 t) \\ y & = & R\sin t(1-\cos t) \\ z & = & R(1-\cos t) \end{array}\right.$. En déduire la longueur L de Γ. Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.

- Exercice d'analyse n° 7, 6ème série, Recueil 2003

Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.

7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

- Exercice d'analyse n° 8, 6ème série, Recueil 2003

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

- Exercice d'analyse n° 9, 6ème série, Recueil 2003

Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx$.
2. $\displaystyle\int \cos^5 t \, dt$; $\displaystyle\int \cosh^3 t \, dt$; $\displaystyle\int \cos^4 t \, dt$; $\displaystyle\int \sinh^4 t \, dt$.
3. $\displaystyle\int x^3 e^x \, dx$.
4. $\displaystyle\int \ln x \, dx$; $\displaystyle\int x \ln x \, dx$; $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$.
5. $\displaystyle\int \cosh t \sin t \, dt$.
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.
7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.
8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx$.
9. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx$; $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \, dx$.
10. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}} \, dx$ pour $0 < x < 1$.
11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$.
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$ avec $0 < x < a$.
14. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\cosh x + \sinh x} \, dx$.

- Exercice d'analyse n° 10, Complément 6ère série, Recueil 2003

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(bile)} d(bile).$$

- Exercice d'analyse n° 11, Complément 6ère série, Recueil 2003

Convergence et calcul de :

$$\int_0^{1} \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2},$$

$$\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt.$$