- Réponse Exercice d'analyse n° 1, 6ème série, Recueil 2003

$$S = \frac{\pi}{(1-\lambda^2)^{3/2}}.$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 2, 6ème série, Recueil 2003

$$L = \frac{3\pi a}{2}, \quad A_1 = \frac{5\pi - 9\sqrt{3}}{32}a^2, \quad A_2 = \frac{5\pi + 18\sqrt{3}}{32}a^2.$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 3, 6ème série, Recueil 2003

$$A = 4\pi^2 Rr, \quad V = 2\pi^2 Rr^2.$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 4, 6ème série, Recueil 2003

$$L = 8R, \quad A = 3\pi R^2, \quad V_1 = 5\pi^2 R^3, \quad V_2 = 6\pi^3 R^3, \quad A_1 = \frac{64\pi}{3}$$

$$16\pi^2 R^2.$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 5, 6ème série, Recueil 2003

$$L = 8(n+1)r = 8\frac{n+1}{n}R, \quad A = \pi(n+1)(n+2)r^2 = \pi\frac{(n+1)(n+}{n^2}$$

$$\frac{128\pi R^2}{5}, \quad V = \frac{64\pi R^3}{3}.$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 6, 6ème série, Recueil 2003

$$L = 4R\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right).$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 7, 6ème série, Recueil 2003

Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k$.
4. $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. Primitives : $4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k$.
5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + k$.
6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2} = \frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
   Primitives : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right| + k$.
7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple.
   Primitives : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)} + \frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)} + \frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.
8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ est un élément simple. Primitives : $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3})$ +
9. $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitives : $\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan($
10. $\frac{x^3+2}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$. Primitives : $\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + k$.
11. $\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{3}{2(x-2)^2}$. Primitives : $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{2(x-2)} + k$.
12. $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} = \frac{1}{2}(x^3-x^2+3) - \frac{3}{2x}$. Primitives : $\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\ln|x| + k$.
13. $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)} = \frac{1}{4^3(x+1)} + \frac{1-x}{4^3(x^2+3)} + \frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
    Primitives : $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)} - \frac{1}{2^7}\ln(x^2+3) - \frac{1}{3\sqrt{3}\,2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4^3}\ln|x$
14. $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2} = x^2 - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x+4}{x^2+1} + \frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
    Primitives : $\frac{x^3}{3} - 2x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x - \frac{6x+1}{2(x^2+1)} + k$.
15. $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.
    Primitives : $-\frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-1| - \arctan x + k$.

■ Réponse Exercice d'analyse n° 8, 6ème série, Recueil 2003

1. $\frac{1}{x^2+2}$ est un élément simple. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Décomposition : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}$. Intégrale : $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3$.

3. Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x + 1$ est la dérivée de x^2 $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\, dx = \ln 3$.
4. On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples : $\frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4}$, mais il est bien plus simple de faire le changement de $x^2 = u$. Alors $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}$.
5. La décomposition de $\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$ est $x + 18 + \frac{163}{x-4} + \frac{507}{(x-4)^2} + \frac{565}{(x-4)^3}$; les primi $\frac{x^2}{2} + 18x - \frac{1014x-3491}{2(x-4)^2} + 163\ln|x-4| + C$. Enfin, $\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\, dx = \frac{5565}{32} -$
6. Décomposition : $\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}$. Primitives : $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right|$ $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4)$.
7. Décomposition : $\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}$. Les primitives sont : $\ln(x+2)^2 + \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$. Intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17}{x^3+8}$ $6 + \frac{7\ln 3 - 3\ln 7}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.
8. Décomposition : $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$. Primitives : $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x$ - $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\, dx = \ln\frac{3}{2} + 2\arctan\frac{1}{7}$.
9. La décomposition est $\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1 + \frac{4/3}{(x-1)^2} + \frac{11/9}{x-1} - \frac{11/9}{x+2}$. On trou $\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\, dx = \frac{5}{3} - \frac{22}{9}\ln 2$.
10. La décomposition de $\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$ est $\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2+2} - \frac{6}{(x^2+2)^2} - \frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$ mitives sont $-\frac{1}{x^3} + \frac{2x+3}{(x^2+2)^2} + \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$. Enfin $\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2}{x^4(x^2+2)^3}$ $\frac{37}{72} + 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
11. Décomposition de la fraction rationnelle : $\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1} - \frac{2x+5}{x^2+4}$. Primitives : l $3\arctan x - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$. Alors $\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\, dx = \ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right| + 3\arctan a - \frac{5}{2}\arctan$ Enfin $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{4} + 2\ln 2$.
12. Pour factoriser le dénominateur, penser à faire $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$; alors $\frac{1}{x^4+1} = \frac{(x\sqrt{2}+2)/4}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{(x\sqrt{2}-2)/4}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Les primitives s'écrivent

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1) + \arctan(x\sqrt{2}-1)\Big) + C$$

ce qui donne $\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{33+20\sqrt{2}}{17} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\pi - \arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)$.

- Réponse Exercice d'analyse n° 9, 6ème série, Recueil 2003

1. Changement de variable $u = \sin^2 x$ (ou d'abord $u = \sin x$) ; ϵ
2. Deux méthodes : changement de variable $u = \sin t$ (ou $u = \sinh t$), ou linéarisa
   $\frac{1}{15}(15\sin t - 10\sin^3 t + 3\sin^5 t) + C$ ou $\frac{1}{80}\sin 5t + \frac{5}{48}\sin 3t + \frac{5}{8}\sin t + C$;
   $\sinh t + \frac{1}{3}\sinh^3 t + C$ ou $\frac{1}{12}\sinh 3t + \frac{3}{4}\sinh t + C$;
   $\frac{1}{32}(\sin 4t + 8\sin 2t + 12t) + C$; $\frac{1}{32}(\sinh 4t - 8\sinh 2t + 12t) + C$.
3. Intégrations par parties : $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$.
4. Intégration par parties : $x\ln x - x + C$; $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$; $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
5. Intégrations par parties : $\frac{1}{2}(\sinh t \sin t - \cosh t \cos t) + C$.
6. Changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$; $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ sur chaque intervalle...

7. Changement de variable $x = a\sin u$; $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$.
8. Changement de variable $u = e^x$; $\frac{2}{3}\sqrt{e^x + 1}(e^x - 2) + C$.
9. Intégrations par parties : $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$;
   $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx) + C$.
10. Changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$.
11. Changement de variable $t = \arcsin x$; $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$.
12. Changements de variable $u = \tan\frac{x}{2}$, $t = 1+u$; $\arctan(\tan\frac{x}{2}+1)+C$ sur chaque i
    Mais, au fait, ne cherchait-on pas une primitive *sur* $\mathbb{R}$?
13. Changement de variable $x^3 = u^2$; $\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}} + C$.
14. Multiplier et diviser par $\cosh x - \sinh x$, ou passer en e^x ; $\frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{\cosh}{4}$
    $\frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$.

- Exercice d'analyse n° 10, Complément 6ère série, Recueil 2003

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(bile)} d(bile).$$

- Exercice d'analyse n° 11, Complément 6ère série, Recueil 2003

Convergence et calcul de :

$$\int_0^{1} \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2},$$

$$\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt.$$