- Exercice d'analyse n° 1 de l'examen partiel de ' Université de Paris 8, Décembre 2003

Calculer les limites des sommes de Riemann :

a/ $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n^3}{n^3+k^3}$ (on donne : $\displaystyle\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$);

b/ $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ (intégration par parties).

- Exercice d'analyse n° 2 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

Calculer une primitive pour chacune des quatre fonctions suivantes, définies sur $[-1,1]$:

a/ $x\mapsto \text{Arccos}\, x$; b/$x\mapsto\sqrt{1-x^2}$; c/ $x\mapsto x\text{Arcsin}\, x$; d/ $x\mapsto\sqrt{\dfrac{\text{Arccos}\, x}{1-x^2}}$.

Calculer la valeur moyenne sur $[-1,1]$ de chacune de ces quatre fonctions.

(N.B. : la dernière fonction n'est pas définie aux bornes, mais sa primitive (n'importe laquelle) l'est, et l'intégrale sur $[-1,1]$ -intégrale impropre- a bien un sens.)

- Exercice d'analyse n° 3 de l'examen partiel de l Université de Paris 8, Décembre 2003

Calculer $\displaystyle\lim_{h\longrightarrow0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\text{Arctan}\, x\, dx$ (on ne cherchera pas à calculer de primitive).

- Exercice d'analyse n° 4 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ (en écrivant que $\displaystyle\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}x.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et en intégrant par parties).

- Exercice d'analyse n° 5 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

On considère l'équation différentielle : $y' + 3y = e^{-t} \cos t \quad (1)$

a/ On cherche les solutions sous la forme $y(t) = z(t)e^{-3t}$ (N.B. s'il y avait 0 à la place de $e^{-t}\cos t$, il est facile de vérifier que ce serait la forme générale de la solution de (1), avec $z = C^{te}$). Montrer que $z'e^{-3t} = e^{-t}\cos t$ et en déduire que $z = \int e^{2t} \cos t \, dt$.

b/ Calculer la primitive la plus générale de $t \mapsto e^{2t} \cos t$ et en déduire la solution générale de (1).