- Réponse Exercice d'analyse n° 1 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

a/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{n^3}{n^3+k^3} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ (limite d'une somme de Riemann)

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\ln(1-x+x^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b/ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\pi}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$ (limite d'une somme de Riemann)

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\sin x - x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 2 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003 a/ $\int \operatorname{Arccos} x\,dx = x\operatorname{Arccos} x + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2} + Cte$

b/ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, soit :

$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x + Cte$, i.e. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x\right) + Cte$

ou encore, par un changement de variable : si $u = \operatorname{Arcsin} x$: alors $x = \sin u$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos u$ $\left(\text{comme } u = \operatorname{Arcsin} x\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}\ , \text{donc } \cos u \ge 0\right)$ et $dx = \cos u\,du$, donc :

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2u)\,du = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + Cte = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) + Cte$

$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} x + x\sqrt{1-x^2}\right) + Cte.$

c/ $\int x\operatorname{Arcsin} x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{Arcsin} x\,d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\operatorname{Arcsin} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x\right) + Cte$ (d'après le b/)

$= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + Cte.$

d/ Si $u = \operatorname{Arccos} x$: $\int \sqrt{\frac{\operatorname{Arccos} x}{1-x^2}}\,dx = -\int \sqrt{u}\,du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + Cte = -\frac{2}{3}(\operatorname{Arccos} x)^{\frac{3}{2}} + Cte.$

Valeur moyenne de ces 4 fonctions sur $[-1, 1]$:

a/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{Arccos} x\,dx = \frac{1}{2}\left[x\operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$

b/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin} x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}$

c/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\operatorname{Arcsin} x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{8}.$

d/ $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{\operatorname{Arccos} x}{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[-(\operatorname{Arccos} x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\pi^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3}.$

- Réponse Exercice d'analyse n° 3 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

D'après la formule fondamentale du calcul intégral (i.e. $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$), si F est une primitive de la fonction sous le signe $\int$, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\operatorname{Arctan} x\,dx = \lim_{h\to 0}\frac{F(1+h) - F(h)}{h}$ est la dérivée en 1 de F, c'est-à-dire la valeur en 1 de la fonction F', fonction sous le signe $\int$:

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\operatorname{Arctan} x\,dx = \frac{1}{(1+1)^2}\operatorname{Arctan} 1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$

- Réponse Exercice d'analyse n° 4 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\text{Arctan}\,x]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi-2}{8}.$$

- Réponse Exercice d'analyse n° 5 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Décembre 2003

a/ De $y(t) = z(t)e^{-3t}$ on tire en dérivant : $e^{-t}\cos t = y' + 3y = z'e^{-3t} - 3ze^{-3t} + 3ze^{-3t} = z'e^{-3t}$, d'où $z'(t) = e^{2t}\cos t$, i.e. en intégrant : $z(t) = \int e^{2t}\cos t\,dt + Cte$.

b/ On fait une double intégration par parties : $\int e^{2t}\cos t\,dt = \int e^{2t}d(\sin t) = e^{2t}\sin t - 2\int e^{2t}\sin t\,dt$ $= e^{2t}\sin t + 2\int e^{2t}d(\cos t) = e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\cos t - 4\int e^{2t}\cos t\,dt$, d'où en regroupant les $\int e^{2t}\cos t\,dt$: $5\int e^{2t}\cos t\,dt = e^{2t}(\sin t + 2\cos t) + Cte$, et $z(t) = \int e^{2t}\cos t\,dt = \frac{1}{5}e^{2t}(\sin t + 2\cos t) + Cte$. On en déduit la solution générale de l'équation (1) : $y = z(t)e^{-3t} = \frac{1}{5}e^{-t}(\sin t + 2\cos t) + \lambda e^{-3t}$ (où λ est une constante réelle quelconque).