- Exercice d'analyse n° 1 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Février 2004

Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ (prendre le logarithme et une somme de Riemann).

- Exercice d'analyse n° 2 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Février 2004

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{(x-y)^2}{1+x^2+y^2} dxdy$ (passer en coordonnées polaires).

- Exercice d'analyse n° 3 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Février 2004

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$ converge et la calculer. On pourra poser $u = \sqrt{x}$ et utiliser la décomposition en éléments simples : $\dfrac{x^2}{1+x^4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \dfrac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right]$.

- Exercice d'analyse n° 4 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Février 2004

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^3}$. (Indications : a/ intégrer par parties pour faire disparaître le x du numérateur ; b/ écrire $\dfrac{dx}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x\,dx}{e^x(1+e^x)^2}$ et faire le changement de variable $u = e^x$; c/ décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{u(1+u)^2}$, i.e. l'écrire $\dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{1+u} + \dfrac{c}{(1+u)^2}$)

- Exercice d'analyse n° 5 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Février 2004

Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy\,dx$ converge. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que cette intégrale a pour valeur $\dfrac{2y}{1+4y^2}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy\,dx$ converge et la calculer. En déduire, à l'aide du théorème de Fubini, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

- Exercice d'analyse n° 6 de l'examen partiel de l'Université de Paris 8, Février 2004

Pour tout $x \in]-1,1[$, soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x\sin t}$. En faisant le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, exprimer $I(x)$ en fonction de x à l'aide de la fonction Arctan (on rappelle que si $u = \tan\dfrac{t}{2}$, alors $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$). Montrer, en dérivant les deux membres, l'égalité valable pour tout $x \in]-1,1[$: $\mathrm{Arctan}\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} - \mathrm{Arctan}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arccos}\, x$ et en déduire la valeur de $I(x)$ en fonction de x. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} I(x)\,dx$ converge et la calculer.