- Réponse exercice d'analyse n° 1, 2ème série, Recueil 2003

Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- Réponse exercice d'analyse n° 2, 2ème série, Recueil 2003

1. 0.
2. 1.
3. $7/30$.
4. $1/2$.
5. 1.
6. $-3/2$.
7. 1.
8. 3.
9. 1 ; 2.
10. $3/4$.
11. 0.
12. 0.
13. $1/3$.

- Réponse exercice d'analyse n° 3, 2ème série, Recueil 2003

1.
$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2 - a)^2}{u_n^2} \end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geqslant 0$ on a $u_n \geqslant 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.
   Soit $n \geqslant 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$ car $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
   quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$
   La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$
   s'écrit aussi
$$(u_{n+1} - a)(u_{n+1} + a) = \frac{(u_n - a)^2(u_n + a)^2}{4u_n^2}.$$
   Donc
$$\begin{aligned} u_{n+1} - a &= (u_n - a)^2 \frac{1}{4(u_{n+1} + \sqrt{a})}\left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n - a)^2 \frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n - a)^2 \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leqslant 1$. Si la proposition est vraie rang n, alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} - a &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - a)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$
6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leqslant 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$

■ Réponse exercice d'analyse n° 4, 2ème série, Recueil 2003

1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(\frac{2}{n} - 1).$$

Donc pour à partir de $n \geqslant 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Comme $u_n \leqslant v_n \leqslant v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geqslant u_n \leqslant u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.

3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n \geqslant 2$:

$$u_n \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_n.$$

Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :

$$q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!u_q + 1.$$

Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q + 1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q. Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q < u_{q+1} < \cdots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montrer que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e = \exp(1)$.

■ Réponse exercice d'analyse n° 5, 2ème série, Recueil 2003

1. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leqslant f(u_1)$ donc $u_1 \leqslant u_2$, ensuite $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ soit $u_2 \leqslant u_3$... Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.
   Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.
2. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ et $f([0,4]) \subset [0,4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x+5 = x(x+3)$. Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout n alors $\ell \geqslant 0$. La seule solution positive de $4x+5 = x(x+3)$ est $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant \circ f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.

4. La fonction $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cette intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ_p sa limite. La suite (u_{2n+1}) et décroissante, notons ℓ_i sa limite. Les limites ℓ_p et ℓ_i sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1-f(x))^2 = x$, ou encore $(1-(1-x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2-x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell_p = 1$ qui est le seule point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell_i = 0$ qui est le seule point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

- Réponse exercice d'analyse n° 6, 2ème série, Recueil 2003

1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$

ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.

2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leqslant b$. Alors en ajoutant les deux inégalités

$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2$$
$$a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$

on obtient

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$

De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$

on obtient

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Il faut avant tout remarquer que $\forall n$, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0, et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (u_{n+1}) et arithmétique (v_{n+1}) sont strictement positives.
   (a) On veut montrer que $\forall n \; u_n \leqslant v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0. Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1}, donc, par 1., $u_n \leqslant v_n$.
   (b) On sait d'après 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.

(c) Pour tout n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite l. Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite l'. De plus comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et puisque $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, l et l' doivent vérifier

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l' = \frac{l+l'}{2}$$

d'où $l = l'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.

Définition Deux suites u_n et v_n sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. u_n est croissante et v_n est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème : Si u_n et v_n sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que u_n et v_n vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geqslant 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites u_n et v_n sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

- Réponse exercice d'analyse n° 7, 2ème série, Recueil 2003

Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^k \quad -1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n-1 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n, admet un zéro dans l'intervalle $[0,1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0,1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \text{ (car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc

$$a_n < a_{n-1}.$$

Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.
Pour résumé, nous avons montrer que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n(\frac{1}{2}) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geqslant 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des "gendarmes"). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1 - \ell^{n+1}}{1 - \ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1 - \ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$