■ Exercice d'analyse n° 1, Série d'Orsay

Donner un exemple de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f\ o\ g \neq g\ o\ f$.

■ Exercice d'analyse n° 2, Série d'Orsay

1. Montrer que : $\forall\ a, b \in \mathbb{R}, \quad 4ab \leqslant (a+b)^2$.
2. Déterminer les domaines de définition des fonctions :
$$f(x) = 2\sqrt{x(1-x)} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 3 \quad ,$$
que l'on note D_f et D_g.
3. En utilisant 1, donner un encadrement des éléments de $f(D_f)$. Faire de même pour $g(D_g)$.
4. Montrer que $g\ o\ f$ est bien définie sur D_f. Qu'en est-il pour $f\ o\ g$?

t

■ Exercice d'analyse n° 3, Série d'Orsay

1. Ecrire la division euclidienne de $(x^3 - 13x + 18)$ par $(x-2)$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+3x sin(x)-13x+6}{x sin(x)-4}$. Montrer que f est définie au voisinage de 2 et montrer, en utilisant les théorèmes sur les limites, que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.
3. En revenant à la définition de la limite, montrer, à l'aide d'une majoration de $|f(x) - 3|$, que la limite de f en 2 existe et vaut 3.

■ Exercice d'analyse n° 4, Série d'Orsay

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que :
$$(\forall\ x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) > 0) \qquad \text{et} \qquad (\exists\ l \in \mathbb{R}^\times\ / \quad \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l) \quad .$$

1. Montrer que $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ si et seulement si $\lim_{+\infty} g(x) = 0$.
2. Montrer que si $l > 0$, alors : $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$.

■ Exercice d'analyse n° 5, Série d'Orsay

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degrés respectifs n et m. Etudier, suivant les valeurs de n, m et de certains coefficients de P et Q, la limite de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $+\infty$.

- Exercice d'analyse n° 6, Série d'Orsay

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On rappelle les limites suivantes (à connaître) :

$$\lim_0 \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_0 \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad .$$

Lorsque les limites suivantes existent, les déterminer :

$a.$ $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

$b.$ $\lim_1 \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

$c.$ $\lim_n \sin(\pi(x - E(x)))$

$d.$ $\lim_n (1 - xE(x))(x - E(x))$

$e.$ $\lim_{0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$

$f.$ $\lim_7 \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

$g.$ $\lim_1 \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{(x-1)^2}$

$h.$ $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

$i.$ $\lim_{-\infty} x(\sqrt{1+x^2} + x)$

$j.$ $\lim_{0^+} \sqrt{x}\ \sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$

$k.$ $\lim_0 \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

$l.$ $\lim_{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$

$m.$ $\lim_1 \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

$n.$ $\lim_0 \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

$o.$ $\lim_0 \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$

$p.$ $\lim_0 \frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1}$