- Réponse sujet thermodynamique n° 1, 3ème EMD, ENTP, Alger 2000 :

1° D'après le premier principe, la variation d'énergie interne sur un cycle s'écrit :

$$\Delta U = W + Q_{\mathrm{C}} + Q_{\mathrm{F}} = 0 .$$

2° Puisque le réfrigérateur fonctionne de façon réversible, le second principe (écrit sous forme d'égalité de Clausius) impose :

$$\frac{Q_{\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{F}}} = -\frac{\mathrm{T_C}}{\mathrm{T_F}} .$$

3° On définit le coefficient de performance comme le rapport de ce qui est « efficace » (chaleur extraite de la source froide) à ce qui est « payé » (travail électrique à fournir à la machine).
$Q_{\mathrm{F}} > 0$ et $W > 0$, donc

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{F}}}{W} ,$$

soit avec $W = -Q_{\mathrm{C}} - Q_{\mathrm{F}}$

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{F}}}{-(Q_{\mathrm{C}} + Q_{\mathrm{F}})} = \frac{1}{-1 - \dfrac{Q_{\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{F}}}} .$$

En tenant compte de l'égalité de Clausius, on obtient :

$$\eta_r = \frac{1}{-1 - \dfrac{Q_{\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{F}}}} = \frac{1}{-1 + \dfrac{\mathrm{T_C}}{\mathrm{T_F}}} ,$$

soit

$$\eta_r = \frac{\mathrm{T_F}}{\mathrm{T_C} - \mathrm{T_F}} .$$

Remarque
Ce coefficient de performance théorique est inaccessible ; un réfrigérateur parfait est impossible à concevoir.

Application numérique :

$$\eta_r = \frac{263}{37} \approx 7{,}1$$

4° En utilisant les mêmes équations que précédemment (voir 1° et 2°), on obtient :

$$\eta_i = \frac{Q_F}{W} = \frac{1}{-1 - \frac{Q_C}{Q_F}},$$

or $\frac{Q_C}{Q_F} = -\alpha \frac{T_C}{T_F}$, d'où

$$\eta_i = \frac{1}{-1 + \alpha \frac{T_C}{T_F}} = \frac{T_F}{\alpha T_C - T_F}.$$

Application numérique :

$$\eta_i = \frac{263}{1{,}2 \times 300 - 263} = 2{,}7.$$

Remarques

- Lorsque le réfrigérateur fonctionne, le fluide prend de la chaleur à source froide ($Q_F > 0$) et cède de la chaleur à la source chaude ($Q_C < 0$). On a donc $\frac{Q_C}{Q_F} < 0$, d'où le signe « moins » dans la relation $\frac{Q_C}{Q_F} = -\alpha \frac{T_C}{T_F}$.
- Puisqu'on a tenu compte des causes d'irréversibilité, il est logique de trouver un coefficient de performance inférieur au précédent.

5° Puisque réfrigérateur (le système) décrit un cycle, sa variation d'entropie est nulle : $\Delta S = 0$. Les variations d'entropie des sources chaude et froide sont respectivement $\Delta S_C = \frac{-Q_C}{T_C}$ et $\Delta S_F = \frac{-Q_F}{T_F}$. On en déduit la variation d'entropie de l'ensemble (l'univers) constitué par le réfrigérateur et les deux sources de chaleur :

$$\Delta S_U = -\left(\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}\right),$$

En tenant compte de la relation $\frac{Q_C}{Q_F} = -\alpha \frac{T_C}{T_F}$, on peut écrire :

$$\Delta S_U = (\alpha - 1)\frac{Q_F}{T_F} = 0{,}2\frac{Q_F}{T_F}.$$

Remarque

Puisque $Q_F > 0$, on trouve que variation d'entropie de l'univers est positive. Ceci est en accord avec le second principe puisque le réfrigérateur fonctionne de façon irréversible.

■ Réponse sujet thermodynamique n° 2, 3ème EMD, ENTP, Alger 2000 :

1° La variation d'énergie interne est, d'après le premier principe

$$dU = \delta Q + \delta W = (C_L dT + h dL) + F dL ,$$

puisque l'analogue du travail pour un fluide $-PdV$ est ici FdL. Donc

$$dU = C_L dT + (h + F) dL .$$

2° La variation d'entropie est donnée par

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_L}{T} dT + \frac{h}{T} dL .$$

3° En appliquant le critère de Schwartz à dU qui est une différentielle totale exacte, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = \left(\frac{\partial (h+F)}{\partial T}\right)_L ,$$

soit

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_L + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L .$$

En utilisant l'équation d'état qui donne $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L = -\alpha AE$, on en déduit

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_L - \alpha AE . \qquad (1)$$

Puisque dS est une différentielle totale exacte, on peut écrire d'après le théorème de Schwartz:

$$\left[\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{C_L}{T}\right)\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{h}{T}\right)\right]_L ,$$

soit

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = -\frac{h}{T^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_L ,$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = -\frac{h}{T} + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_L . \qquad (2)$$

En comparant les relations (1) et (2), il vient :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_L - \alpha AE = -\frac{h}{T} + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_L ,$$

soit

$$h = \alpha\, AET .$$

1° En remplaçant l'expression de h dans (2), on obtient :

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = 0 ,$$

ce qui prouve que C_L ne dépend que de T.

- Réponse sujet thermodynamique n° 3, 3ème EMD, ENTP, Alger 2000 :

L'équation de la chaleur à une dimension est de la forme :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} .$$

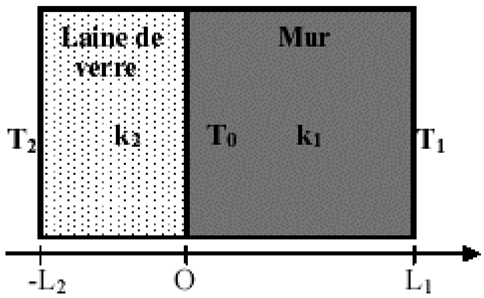
Dans le cas particulier du régime permanent, la température $T(x,t)$ ne dépend plus du temps t

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0 .$$

L'intégration donne une fonction affine de x :

$$T(x) = Ax + B ,$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.



Cas du mur : $0 \le x \le L_1$

En régime permanent, la température varie selon la même loi affine que précédemment :

$$T(x) = A_1 x + B_1 .$$

Avec les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(L_1) = T_1$, il vient :

$$A_1 = \frac{T_1 - T_0}{L_1} \text{ et } B_1 = T_0 ,$$

d'où la loi de la température

$$T(x)=\frac{T_1-T_0}{L_1}x+T_0.$$

Cas de la laine de verre : $-L_2 \leq x \leq 0$

En régime permanent, la température s'écrit :

$$T(x)=A_2x+B_2.$$

En tenant compte des conditions aux limites $T(0)=T_0$ et $T(-L_2)=T_2$, on obtient :

$$T(x)=\frac{T_0-T_2}{L_2}x+T_0.$$

L'égalité des densités de courant thermique au niveau de l'interface $x=0$ permet d'écrire :

$$j_{1Q}=j_{2Q} \Rightarrow -k_1\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{Mur}}=-k_2\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{Laine}} \Rightarrow -k_1\frac{T_1-T_0}{L_1}=-k_2\frac{T_0-T_2}{L_2}.$$

On en déduit la température de l'interface $x=0$:

$$T_0=\frac{\frac{k_1}{L_1}T_1+\frac{k_2}{L_2}T_2}{\frac{k_1}{L_1}+\frac{k_2}{L_2}}.$$

Remarque

La température T_0 est un barycentre de températures T_1 et T_2 affectées respectivement des coefficients $\frac{k_1}{L_1}$ et $\frac{k_2}{L_2}$.