■ Sujet thermodynamique n° 1, 1er EMD, ENTP, Alger 2002 :

On considère un système constitué de N molécules de gaz parfait monoatomique en équilibre thermodynamique à la température T. Le gaz étudié est l'hélium de masse molaire $M = 4\, g \cdot \text{mol}^{-1}$.

1° Si $d\Pi(v)$ représente la probabilité élémentaire pour une particule d'avoir un module de vitesse compris entre v et $v + dv$, écrire sous forme d'une intégrale l'expression de la vitesse moyenne $\bar{v}$ et celle de la vitesse quadratique moyenne u des molécules du gaz.

2° La statistique de Maxwell-Boltzmann propose comme expression de la probabilité:

$$d\Pi(v) = A(T) \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv,$$

où m est la masse d'une molécule d'hélium et k la constante de Boltzmann.

a) Expliciter le raisonnement qui permet de calculer $A(T)$. Exprimer alors $A(T)$ en fonction de m et T.

b) Déterminer les expressions des vitesses $\bar{v}$ et u. Faire l'application numérique pour $T = 300\,K$.

3° L'énergie d'une molécule d'hélium vaut simplement $E = \frac{1}{2}mv^2$.

a) Montrer, à partir de l'expression de $d\Pi(v)$, que la probabilité de rencontrer une molécule dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$ est :

$$d\Pi(E) = B(T)\sqrt{E}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dE,$$

où $B(T)$ est une fonction de la température qu'on déterminera.

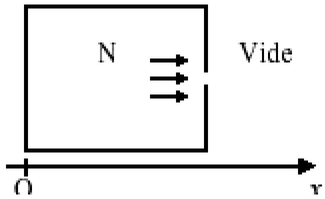
b) On donne $B(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}$. Déterminer l'énergie moyenne $\overline{E}$ d'une molécule. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Calculer, en électronvolt, la valeur de $\overline{E}$ à la température de $300\,K$.

On donne : $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\int_0^{+\infty} x\exp(-ax^2)dx = \frac{1}{2a}$; $\int_0^{+\infty} x^2\exp(-ax^2)dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\int_0^{+\infty} x^3\exp(-ax^2)dx = \frac{1}{2a^2}$; $\int_0^{+\infty} x^4\exp(-ax^2)dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $R = 8{,}32\, J \cdot K^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\, \text{mol}^{-1}$.

■ Sujet thermodynamique n° 2, 1er EMD, ENTP, Alger 2002 :

Un récipient de volume $V = 1\,\ell$, maintenu à température constante $T = 0°C$ contient initialement de l'hélium sous la pression atmosphérique $P_0 = 1\,\text{atm}$. Une des parois de l'enceinte est percée à l'instant $t = 0$ d'un trou circulaire de rayon r qui provoque la fuite du gaz à l'extérieur où règne le vide. L'hélium sera considéré comme un gaz parfait dont les molécules ont la même masse m. On désignera par n le nombre de molécules par unité de volume.



1° Calculer le nombre initial N_0 de molécules dans l'enceinte.

2° Calculer la vitesse moyenne $\bar{v}$ des molécules dans l'enceinte.

3° On suppose que les molécules qui sortent par le trou ont une vitesse moyenne de sortie $\bar{v}_x = \frac{1}{4}\bar{v}$ suivant le sens positif de l'axe Ox. Calculer le nombre η d'atomes par unité de temps sortant par le trou en fonction de n, r, m et T.

4° Montrer que pour un rayon r donné, η est donné par

$$\eta = K(r)\frac{P}{\sqrt{mT}},$$

où P est la pression dans l'enceinte à l'instant t et $K(r)$ une fonction de r que l'on déterminera.

On donne : $R = 8{,}32\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; $\mathcal{N} = 6{,}02\cdot10^{23}\ \text{mol}^{-1}$; $M_{He} = 4\ g\cdot\text{mol}^{-1}$.