

- Réponse sujet thermodynamique n° 1, 1^{er} EMD, ENTP, Alger 2002 :

1° La vitesse moyenne des molécules est donnée par

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \, d\Pi(v). \quad (1)$$

La valeur moyenne de \bar{v}^2 est donnée par

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 \, d\Pi(v). \quad (2)$$

La vitesse quadratique moyenne est $u = \sqrt{\overline{v^2}}$.

2° a) En écrivant que la probabilité pour une particule d'avoir une vitesse de module compris entre 0 et l'infini est **égale à 1**, on obtient :

$$\int_0^{\infty} d\Pi(v) = 1,$$

soit

$$A(T) \cdot 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv = 1.$$

En utilisant l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, avec $a = \frac{m}{2kT}$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv = \frac{1}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right) \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$A(T) \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,$$

soit

$$A(T) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

b) En remplaçant l'expression de la probabilité $d\Pi(v)$ dans l'équation (1), on obtient :

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^3 dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

ou encore

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kR}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

De même, en remplaçant $d\Pi(v)$ dans (2), on obtient

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^4 dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3kT}{m},$$

d'où la vitesse quadratique moyenne :

$$u = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

ou bien

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Application numérique :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \times 8,32 \times 300}{\pi \times 4 \cdot 10^{-3}}} \approx 1260 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad u = \sqrt{\frac{3 \times 8,32 \times 300}{4 \cdot 10^{-3}}} \approx 1360 \text{ m/s}.$$

3° a) On passe de $d\Pi(v)$ à $d\Pi(E)$ par le changement de variables suivant : $E = \frac{1}{2}mv^2$ et

$$dv = \frac{dE}{mv}; \text{ d'où}$$

$$d\Pi(E) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{mv} = \frac{2}{\pi^{1/2} (kT)^{3/2}} \left(\frac{m^{1/2} v}{2^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE,$$

ou encore

$$d\Pi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE.$$

$$\text{On en déduit que } B(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}}.$$

b) L'énergie moyenne d'une molécule est donnée par :

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E d\Pi(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E^{3/2} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE,$$

en faisant le changement de variable, $E = x^2$, on peut écrire :

$$\int_0^{\infty} E^{3/2} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE = 2 \int_0^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{kT}\right) dx = 2 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (kT)^{5/2},$$

d'où

$$\bar{E} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (kT)^{5/2} = \frac{3}{2} kT.$$

Ce résultat était prévisible puisque $\bar{E} = \frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{3kT}{m}\right) = \frac{3}{2} kT.$

Remarque

L'hélium considéré comme un gaz parfait monoatomique possède 3 degrés de liberté de translation. Chaque degré de liberté correspond à une énergie cinétique moyenne $\frac{1}{2} kT$;

l'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est donc $\bar{E} = \frac{3}{2} kT.$

c) Application numérique :

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \frac{R}{\mathcal{N}} T = \frac{3}{2} \times \frac{8,32}{6,02 \cdot 10^{23}} \times 300 = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ J},$$

soit

$$\bar{E} = \frac{6,21 \cdot 10^{-21}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,039 \text{ eV}.$$

■ Réponse sujet thermodynamique n° 2, 1^{er} EMD, ENTP, Alger 2002 :

1° L'équation d'état du gaz parfait s'écrit :

$$P_0 V = N_0 kT,$$

on en déduit

$$N_0 = \frac{P_0 V}{kT}.$$

Application numérique :

La constante de Boltzmann vaut : $k = \frac{R}{\mathcal{N}} = \frac{8,32}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$; d'où

$$N_0 = \frac{10^5 \times 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 273} = 2,65 \cdot 10^{22} \text{ molécules}.$$

2° La vitesse moyenne des molécules est donnée par

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1202 \text{ m/s}$$

3° Le nombre de molécules qui **sortent pendant dt** sont contenues dans un cylindre de base la section circulaire s du trou et de longueur $dx = \bar{v}_x dt$:

$$\alpha = \frac{N(t)}{V} \times s \bar{v}_x dt = n s \bar{v}_x dt.$$

Pour obtenir le nombre η de molécules qui sortent par unité de temps, il suffit de diviser le nombre α par dt , soit

$$\eta = n s \bar{v}_x,$$

or $s = \pi r^2$ et $\bar{v}_x = \frac{1}{4} \bar{v} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, d'où

$$\eta = n r^2 \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}. \quad (1)$$

4° Ecrivons l'équation d'état du gaz parfait et calculons la densité n des molécules :

$$PV = NkT \Rightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}.$$

En remplaçant n dans l'équation (1), on obtient :

$$\eta = \frac{Pr^2}{kT} \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}},$$

ou encore

$$\eta = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2k}} r^2 \right) \frac{P}{\sqrt{mT}},$$

d'où

$$K(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} r^2.$$