■ Réponse Exercice de thermodynamique n° 1, ENTP, 2002 :

1° Considérons au niveau du sol (z = 0) une tranche d'air de volume V et de masse m. La masse volumique $\rho_0 = \dfrac{m}{V}$ de l'air au niveau du sol est déterminée à partir de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$P_0 V = nRT_0 = \frac{m}{M} RT_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{P_0 M}{RT_0},$$

Application numérique :

$$\rho_0 = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \times 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}32 \times 293} \approx 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

2° Suivant un axe vertical Oz, la relation de l'hydrostatique s'écrit :

$$\mathrm{dP} = -\rho\, g\, \mathrm{dz}\,,$$

Or, on sait que la masse volumique ρ à l'altitude z est $\rho = \frac{\mathrm{PM}}{R\mathrm{T}}$, d'où

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{Mg}}{R\mathrm{T}}\mathrm{dz}\,.$$

Avec $\mathrm{T} = \mathrm{T_0} - \alpha\, z$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{Mg}}{R(\mathrm{T_0} - \alpha\, z)}\mathrm{dz}\,,$$

Remarque

La loi de variation $\mathrm{T}(z) = \mathrm{T_0} - \alpha\, z$ caractérise la partie de l'atmosphère terrestre inférieure à 10 km. Elle fut dénommée troposphère en 1902 par Léon Teisserenc de Bort à partir de la racine "tropos", le changement.

et en intégrant entre l'altitude 0 et l'altitude z, il vient

$$\int_{\mathrm{P_0}}^{\mathrm{P}} \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = \int_0^z -\frac{\mathrm{Mg}}{R(\mathrm{T_0} - \alpha\, z)}\mathrm{dz}\,,$$

soit

$$\mathrm{P(z)} = \mathrm{P_0}\left(1 - \frac{\alpha\, z}{\mathrm{T_0}}\right)^{\frac{\mathrm{Mg}}{\alpha R}}.$$

Remarque

On peut écrire la relation précédente sous la forme :

$$\mathrm{PT}^{-\frac{\mathrm{Mg}}{\alpha R}} = \mathrm{P_0 T_0}^{-\frac{\mathrm{Mg}}{\alpha R}}.$$

Eliminons T et $\mathrm{T_0}$ en exploitant la loi des gaz parfaits au niveau du sol et à l'altitude z : $\mathrm{P_0 V_0} = nR\mathrm{T_0}$ et $\mathrm{P(z)V(z)} = nR\mathrm{T(z)}$. On obtient alors :

$$\mathrm{PV^q} = \mathrm{P_0 V_0^q}\,,\ \text{avec}\ \mathrm{q} = \frac{\mathrm{Mg}}{\mathrm{Mg} - \alpha R}.$$

Les transformations réelles au sein de la troposphère ne sont ni isothermes ($\mathrm{PV} = \text{constante}$) ni strictement adiabatiques ($\mathrm{PV}^\gamma = \text{constante}$), mais se situent entre les deux. On les dit allotropiques : $\mathrm{PV^q} = \text{constante}$; $1 < \mathrm{q} < \gamma$.

La relation $\rho = \dfrac{\mathrm{PM}}{R\mathrm{T_0}\left(1 - \frac{\alpha\, z}{\mathrm{T_0}}\right)}$ fournit la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude :

$$\rho(z) = \frac{P_0 M}{R T_0}\left(1 - \frac{\alpha\, z}{T_0}\right)^{\left(\frac{Mg}{\alpha R} - 1\right)},$$

et puisque $\rho_0 = \dfrac{P_0 M}{R T_0}$, on obtient :

$$\rho(z) = \rho_0\left(1 - \frac{\alpha\, z}{T_0}\right)^{\left(\frac{Mg}{\alpha R} - 1\right)}.$$

- Réponse Exercice de thermodynamique n° 2, ENTP, 2002

Dans la première expérience, le glaçon évolue selon 3 phases :

– augmentation de sa température de $T_2 = -25{,}5°C$ à $T_0 = 0°C$; la quantité de chaleur reçue par le glaçon (solide) est :

$$Q_{1g} = mc_g(0 - T_2),$$

– fusion du glaçon à température constante, $T_0 = 0°C$, et sous pression la pression de 1 atmosphère ; la quantité de chaleur nécessaire à la fusion est :

$$Q_{2g} = mL_f,$$

– augmentation de sa température de $T_0 = 0°C$ à $T = 5{,}6°C$; la quantité de chaleur reçue par le glaçon (liquide) est :

$$Q_{3g} = mc_e(T - 0).$$

La quantité de chaleur totale reçue par le glaçon au cours de cette expérience est :

$$Q_g = mc_g(0 - T_2) + mL_f + mc_e(T - 0),$$

Le calorimètre et l'eau qu'il contient ont fourni une quantité de chaleur $Q_c = C(T - T_1)$. Le système étant isolé, on peut écrire :

$$Q_g + Q_c = 0,$$

soit

$$mc_g(0 - T_2) + mL_f + mc_e(T - 0) + C(T - T_1) = 0. \qquad (1)$$

Dans la deuxième expérience, le glaçon est initialement à $T_3 = 0°C$. Il n'y a donc que deux phases d'évolution : le glaçon est d'abord transformé en eau à $T_3 = 0°C$, puis porté à une température d'équilibre $T' = 8{,}8°C$. La quantité de chaleur qu'il reçoit est :

$$Q_g' = m'L_f + m'c_e(T' - 0).$$

La quantité de chaleur fournie par le calorimètre et l'eau qu'il contient est : $Q_c' = C(\mathrm{T}'-\mathrm{T}_1)$. En écrivant l'équation calorimétrique, $Q_g' + Q_c' = 0$ on obtient :

$$m' L_f + m' c_e (\mathrm{T}'-0) + C(\mathrm{T}'-\mathrm{T}_1) = 0,$$

d'où

$$L_f = \frac{C(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}')}{m'} - c_e \mathrm{T}'.$$

Application numérique :

$$L_f = \frac{1350(18{,}3 - 8{,}8)}{0{,}035} - 4190 \times 8{,}8 = 3{,}3 \cdot 10^5 \ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}.$$

Tirons maintenant de l'équation (1) l'expression de c_g, on obtient :

$$c_g = \frac{1}{\mathrm{T}_2}\left[\frac{C(\mathrm{T} - \mathrm{T}_1)}{m} + c_e \mathrm{T} + L_f\right].$$

Application numérique :

$$c_g = \frac{1}{-25{,}5}\left[\frac{1350(5{,}6 - 18{,}3)}{0{,}042} + 4190 \times 5{,}6 + 3{,}3 \cdot 10^5\right] \approx 2150 \ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}.$$