

- Réponse sujet thermodynamique n° 5, ENTP, Alger 2003 :

Le premier principe, appliqué entre A et B donne :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB}. \quad (1)$$

La variation d'énergie interne du gaz parfait est obtenue par la première loi de Joule :

$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = \frac{3}{2}nR(T_B - T_A), \quad (2)$$

puisque  $C_V = \frac{3}{2}R$  pour un gaz parfait monoatomique.

Exprimons les températures  $T_B$  et  $T_A$  en utilisant l'équation d'état du gaz parfait :

$$\text{Etat initial A} \begin{cases} P_1 \\ V_1 \\ T_A \end{cases} \quad \text{Etat initial B} \begin{cases} P_2 \\ 2V_1 \\ T_B \end{cases}$$

On obtient :

$$P_1 V_1 = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{P_1 V_1}{nR},$$

et

$$P_2 2V_1 = nRT_B \Rightarrow T_B = \frac{2P_2 V_1}{nR}.$$

Le gaz décrit un segment de droite AB (passant par l'origine) d'équation  $P = \alpha V = \frac{P_1}{V_1} V$ . Les coordonnées du point B doivent satisfaire l'équation de cette droite ; on en déduit la pression  $P_2$  :

$$P_2 = \frac{P_1}{V_1} 2V_1 = 2P_1,$$

d'où

$$T_B = \frac{4P_1 V_1}{nR}.$$

En reportant les expressions des températures  $T_B$  et  $T_A$  dans l'équation (2), on obtient :

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(4P_1 V_1 - P_1 V_1) = \frac{9}{2}P_1 V_1. \quad (3)$$

Calculons le travail  $W_{AB}$  échangé par le gaz au cours de la transformation AB en utilisant deux méthodes :

#### Première méthode :

Le travail élémentaire échangé par le gaz au cours de la transformation réversible AB s'écrit :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV = -P dV.$$

L'équation de la droite AB :  $P = \frac{P_1}{V_1} V$  donne la loi de variation de  $P$  avec  $V$ . En remplaçant l'expression de la pression  $P$  dans l'équation (1), il vient :

$$\delta W = -\frac{P_1}{V_1} V dV.$$

Le travail total échangé par le gaz s'écrit :

$$W_{AB} = - \int_{V_1}^{2V_1} \frac{P_1}{V_1} V dV = - \left[ \frac{P_1}{V_1} \frac{1}{2} V^2 \right]_{V_1}^{2V_1} = -\frac{3}{2} P_1 V_1. \quad (4)$$

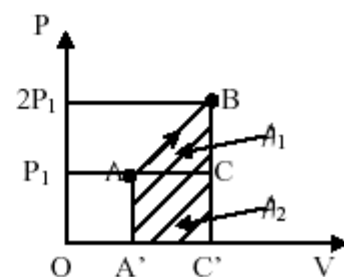
#### Deuxième méthode :

Au cours de la transformation AB, le gaz fournit un travail  $W$  (car  $V_B > V_A$ ) qui est par l'opposé de l'aire  $\mathcal{A}$  située sous la droite AB. On peut considérer que cette aire est la somme de deux aires :  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  ;  $\mathcal{A}_1$  représente l'aire du triangle rectangle ABC, et  $\mathcal{A}_2$  celle du rectangle ACC'A'. On aura ici :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(2V_1 - V_1)(2P_1 - P_1) = \frac{1}{2}P_1 V_1 \text{ et } \mathcal{A}_2 = P_1(2V_1 - V_1) = P_1 V_1,$$

d'où le travail :

$$W_{AB} = -(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = -\frac{3}{2} P_1 V_1.$$



**Remarque**

On peut considérer aussi que l'aire est mesurée par l'opposé de l'aire du trapèze rectangle  $AA'C'B$  de bases  $AA'=P_1$  et  $BC'=2P_1$  et de hauteur  $A'C'=V_1$  :

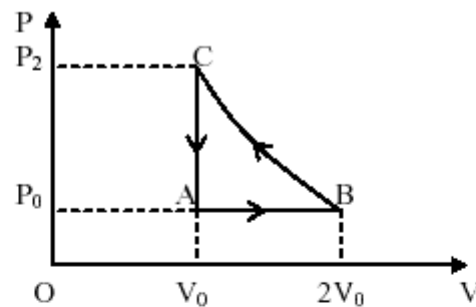
$$W = -\mathcal{A} = -\frac{(P_1 + 2P_1)V_1}{2} = -\frac{3}{2}P_1V_1.$$

En reportant les expressions (4) et (3) dans la relation (1), il vient :

$$Q_{AB} = \frac{9}{2}P_1V_1 + \frac{3}{2}P_1V_1 = 6P_1V_1.$$

■ Réponse sujet thermodynamique n° 6, ENTP, Alger 2003 :

a) La représentation du cycle dans un diagramme  $(P, V)$  donne :



b) Le gaz subit une détente isobare de l'état  $A(P_0, V_0, T_0)$  à l'état  $B(P_0, 2V_1, T)$ . Pour trouver la température  $T$  à laquelle s'effectue la compression isotherme, on applique la loi des gaz parfaits :

$$P_0V_0 = RT_0 \quad \text{et} \quad P_02V_0 = RT,$$

d'où

$$T = 2T_0.$$

La pression maximale est atteinte à la fin de l'isotherme, c'est-à-dire au point  $C(P_C, V_0, 2T_0)$ . En écrivant l'équation d'état du gaz parfait, on obtient :

$$P_CV_0 = 2RT_0,$$

or  $P_0V_0 = RT_0$ . On en déduit :

$$P_C = 2P_0.$$

c) Première méthode :

Calculons les travaux échangés par le gaz au cours de chaque transformation.

– Détente isobare AB :

au cours de l'isobare AB, la pression est constante :  $P = P_0$ , donc

$$W_{AB} = - \int_A^B P dV = - \int_{V_0}^{2V_0} P_0 dV = -P_0(2V_0 - V_0) = -P_0 V_0.$$

– Compression isotherme BC :

sur l'isotherme BC, la pression est donnée par la loi des gaz parfaits :  $P = \frac{2RT_0}{V}$ , donc

$$W_{BC} = - \int_B^C P dV = -2RT_0 \int_{2V_0}^{V_0} \frac{dV}{V} = -2RT_0 \ln \frac{1}{2}.$$

En tenant compte de l'équation  $2RT_0 = 2P_0 V_0$ , il vient :

$$W_{BC} = 2P_0 V_0 \ln 2.$$

– Refroidissement isochore CA :

sur l'isochore CA,  $dV = 0$ , soit :

$$W_{CA} = - \int_C^A P dV = 0.$$

Le travail  $W$  sur le cycle est donné par :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = P_0 V_0 (2 \ln 2 - 1).$$

Pour déterminer la quantité de chaleur échangée au cours du cycle, on utilise le fait que, sur le cycle,  $\Delta U = 0$ . Or  $\Delta U = W + Q$ , d'où

$$Q = -W = P_0 V_0 (1 - 2 \ln 2).$$

Deuxième méthode :

Calculons les quantités de chaleur échangées par le gaz au cours de chaque transformation.

– Détente isobare AB :

la quantité de chaleur élémentaire reçue au cours de l'isobare AB est :

$$\delta Q = C_p dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT ;$$

en intégrant, on obtient la quantité de chaleur totale :

$$Q_{AB} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \int_{T_0}^{2T_0} dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (2T_0 - T_0) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_0,$$

or,  $RT_0 = P_0 V_0$ , d'où

$$Q_{AB} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0.$$

– Compression isotherme BC :

au cours de la compression isotherme BC, la variation d'énergie interne du gaz est nulle :  $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} = 0$ . Comme  $W_{BC} = 2P_0V_0 \ln 2$  (voir première méthode), il vient :

$$Q_{BC} = -W_{BC} = -2P_0V_0 \ln 2.$$

– Refroidissement isochore CA :

au cours de l'isochore CA, la quantité de chaleur élémentaire s'écrit :

$$\delta Q = C_V dT = \frac{R}{\gamma-1} dT.$$

Par intégration, on obtient :

$$Q_{CA} = \frac{R}{\gamma-1} \int_{2T_0}^{T_0} dT = \frac{R}{\gamma-1} (T_0 - 2T_0) = -\frac{1}{\gamma-1} RT_0,$$

soit

$$Q_{CA} = -\frac{1}{\gamma-1} P_0V_0.$$

La quantité de chaleur totale échangée au cours du cycle est donc

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0V_0 - 2P_0V_0 \ln 2 - \frac{1}{\gamma-1} P_0V_0,$$

soit

$$Q = P_0V_0(1 - 2\ln 2).$$

On en déduit le travail échangé au cours du cycle :

$$W = -Q = P_0V_0(2\ln 2 - 1).$$

**Remarque**

Puisque  $2\ln 2 > 1$  alors  $W > 0$  ; le gaz a donc reçu un travail  $W$  au cours du cycle. Ce résultat était prévisible car le cycle est décrit dans le sens trigonométrique.

■ Réponse sujet thermodynamique n° 7, ENTP, Alger 2003 :

a) Supposons que la glace fond complètement et que la température finale  $T_f$  soit supérieure à  $0^\circ\text{C}$  (température de fusion de la glace). La quantité de chaleur fournie par l'eau est :

$$Q_1 = mc(T_f - T).$$

La quantité de chaleur absorbée par la glace pour se transformer en eau à  $T_f$  s'écrit :

$$Q_2 = m'c'(0 - T') + m'L + m'c(T_f - 0).$$

En écrivant l'équation calorimétrique  $Q_1 + Q_2 = 0$ , on obtient :

$$T_f = \frac{mcT + m'c'T' - m'L}{(m+m')c}$$

Application numérique :

$$T_f = \frac{200 \times 4,18 \times 50 + 100 \times 2,09 \times (-10) - 100 \times 334}{300 \times 4,18} \approx 5^\circ \text{C}.$$

L'hypothèse  $T_f > 0^\circ \text{C}$  est donc vérifiée. Le mélange est composé de 300 g d'eau car toute la glace a fondue.

b) Si on fait la même hypothèse qu'en a), on obtient :

$$T_f = \frac{mcT + m'c'T' - m'L}{(m+m')c} = \frac{200 \times 4,18 \times 50 + 200 \times 2,09 \times (-10) - 200 \times 334}{400 \times 4,18} \approx -17,4^\circ \text{C}$$

L'hypothèse  $T_f > 0^\circ \text{C}$  n'est pas vérifiée.

On doit changer d'hypothèse et supposer alors que  $T_f = 0^\circ \text{C}$ . Dans ce cas, l'état final est composé d'un mélange de glace et d'eau. Il faut alors préciser si de la glace a fondue ou si de l'eau s'est solidifiée.

Supposons que la glace fond et désignons par  $m'_f$  la masse de glace fondue à  $0^\circ \text{C}$ . La quantité de chaleur fournie par l'eau s'écrit :

$$Q_1 = mc(0 - T).$$

La glace a absorbée la quantité de chaleur

$$Q_2 = m'c'(0 - T') + m'_f L.$$

L'équation calorimétrique  $Q_1 + Q_2 = 0$  donne :

$$m'_f = \frac{mcT + m'c'T'}{L}$$

Application numérique :

$$m'_f = \frac{200 \times 4,18 \times 50 + 200 \times 2,09 \times (-10)}{334} \approx 112,6 \text{ g}$$

Puisque  $m'_f < m'$ , l'hypothèse  $T_f = 0^\circ \text{C}$  est donc vérifiée. On obtient un mélange composé de  $m'_f + m = 312,6 \text{ g}$  d'eau et de  $m' - m'_f = 87,4 \text{ g}$ .

■ Réponse sujet thermodynamique n° 8, ENTP, Alger 2003 :

a) Les transformations BC et DA étant adiabatiques réversibles, on peut utiliser la loi de Laplace qui lie T et V :

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$$

et

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}.$$

En faisant le rapport membre à membre, on obtient :

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1},$$

d'où

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A} = 5.$$

b) quantité de chaleur échangée avec la source chaude le long de l'isotherme AB :

$$Q_{AB} = -W_{AB} = \int_A^B P dV = RT_1 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = 5356 \text{ J},$$

quantité de chaleur échangée avec la source froide le long de l'isotherme CD :

$$Q_{CD} = -W_{CD} = \int_C^D P dV = RT_2 \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} = -RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D} = -4017 \text{ J}.$$

Le travail fourni au cours du cycle est :

$$W = -Q_{AB} - Q_{CD} = RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D} - RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = R(T_2 - T_1) \ln \frac{V_B}{V_A} = -1339 \text{ J},$$

puisque  $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A} = 5$ .

c) Le rendement du cycle de Carnot est défini par :

$$\rho = \frac{-W}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{-RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D}}{RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,25.$$

puisque  $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A} = 5$