

- Réponse sujet thermodynamique n° 1, 3^{ème} EMD, ENTP, Alger 1999 :

1° L'équation de la chaleur à une dimension spatiale x est de la forme :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

En régime permanent : $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$. Donc la solution de l'équation de la chaleur s'écrit :

$$T(x) = Ax + B,$$

où A et B sont des constantes.

2° Cas de l'acier : $0 \leq x \leq L$

En régime permanent, la température s'écrit :

$$T(x) = A_1 x + B_1 ; \begin{cases} \text{en } x = 0 & T = T_1 \\ \text{en } x = L & T = T_1' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = T_1 \\ \text{et } A_1 = \frac{T_1' - T_1}{L} \end{cases}$$

d'où

$$T(x) = \frac{T_1' - T_1}{L} x + T_1.$$

Cas de l'aluminium : $L \leq x \leq 2L$

La température varie selon la même loi affine que précédemment :

$$T(x) = A_2 x + B_2 ; \begin{cases} \text{en } x = L & T = T_1' \\ \text{en } x = 2L & T = T_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = 2T_1' - T_2' \\ \text{et } A_2 = \frac{T_2' - T_1'}{L} \end{cases}$$

d'où

$$T(x) = \frac{T_2' - T_1'}{L}x + 2T_1' - T_2'.$$

Cas du cuivre: $2L \leq x \leq 3L$

De même pour le cuivre, on a :

$$T(x) = A_3x + B_3 ; \begin{cases} \text{en } x = 2L & T = T_2' \\ \text{en } x = 3L & T = T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_2 = 3T_2' - 2T_2 \\ \text{et } A_2 = \frac{T_2 - T_2'}{L} \end{cases},$$

d'où

$$T(x) = \frac{T_2 - T_2'}{L}x + 3T_2' - 2T_2.$$

3° En régime permanent, la continuité au niveau de chaque jonction se traduit par l'égalité des densités de courant thermique :

$$\text{en } x = L, j_1Q = j_2Q \Rightarrow -\lambda_1 \left(\frac{dT}{dx} \right)_{\text{Acier}} = -\lambda_2 \left(\frac{dT}{dx} \right)_{\text{Al}} \Rightarrow -\lambda_1 \frac{T_1' - T_1}{L} = -\lambda_2 \frac{T_2' - T_1'}{L} \quad (1)$$

$$\text{en } x = 2L, j_2Q = j_3Q \Rightarrow -\lambda_2 \left(\frac{dT}{dx} \right)_{\text{Al}} = -\lambda_3 \left(\frac{dT}{dx} \right)_{\text{Cu}} \Rightarrow -\lambda_2 \frac{T_2' - T_1'}{L} = -\lambda_3 \frac{T_2 - T_2'}{L} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) permettent d'écrire le système d'équations en T_1' et T_2' :

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)T_1' - \lambda_2 T_2' = \lambda_1 T_1 \\ -\lambda_2 T_1' + (\lambda_1 + \lambda_3)T_2' = \lambda_3 T_2 \end{cases}$$

dont les solutions sont déterminées par la méthode de Cramer:

$$T_1' = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 T_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_3 T_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)T_1 + \lambda_2\lambda_3 T_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_2^2} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)T_1 + \lambda_2\lambda_3 T_2}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}. \quad (3)$$

On remarque que T_1' est barycentre de T_1 et T_2 affectés respectivement des coefficients $\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)$ et $\lambda_2\lambda_3$.

$$T_2' = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 T_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 T_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)T_2 + \lambda_1\lambda_2 T_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_2^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2 T_1 + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)T_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (4)$$

De même, T_2' est barycentre de T_1 et T_2 affectés respectivement des coefficients $\lambda_1\lambda_2$ et $\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4° Calculons la différence $T_1' - T_2'$:

$$\begin{aligned} T_1' - T_2' &= \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)T_1 + \lambda_2\lambda_3T_2}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3} - \frac{\lambda_1\lambda_2T_1 + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)T_2}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3} \\ &= \frac{[\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2]T_1 - [\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_2\lambda_3]T_2}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}, \end{aligned}$$

et après simplification, on obtient :

$$T_1' - T_2' = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3} (T_1 - T_2).$$

Puisque $K = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}$ est une constante, $T_1' - T_2'$ est proportionnel à $T_1 - T_2$.

5° - De la relation $K = \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3}$, on en déduit le coefficient λ_2 :

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{K} - 1 \right) \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3},$$

ou encore en remplaçant K par le rapport $\frac{T_1' - T_2'}{T_1 - T_2}$, il vient :

$$\lambda_2 = \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1' - T_2'} - 1 \right) \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}.$$

Application numérique :

$$\lambda_2 = \left(\frac{100}{16.2} - 1 \right) \frac{45 \times 380}{45 + 380} \approx 208 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

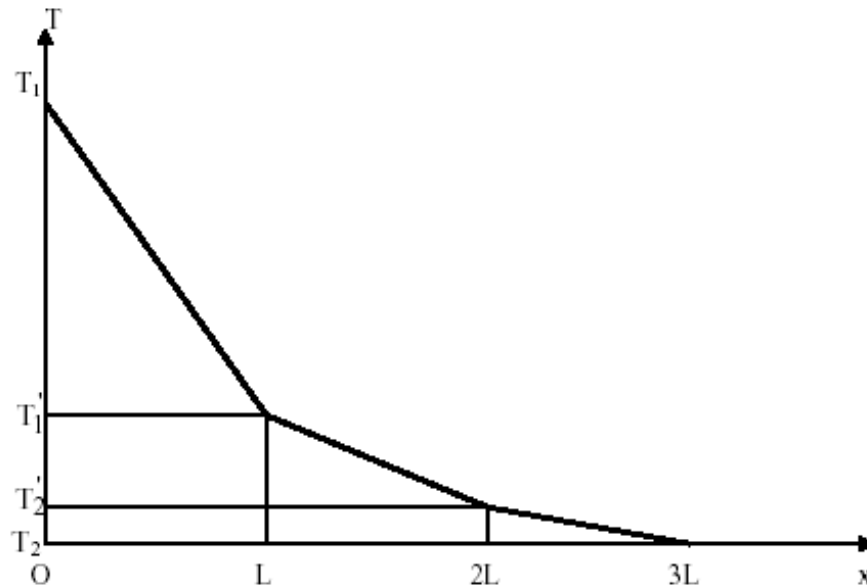
- D'après les équations (3) et (4) on a :

$$T_1' = \frac{45 \times (208 + 380) \times 100}{45 \times (208 + 380) + 208 \times 380} \approx 25,1^\circ \text{C} \quad \text{et} \quad T_2' = \frac{45 \times 208 \times 100}{45 \times (208 + 380) + 208 \times 380} \approx 8,9^\circ \text{C}.$$

- Le coefficient de proportionnalité K est :

$$K = \frac{45 \times 380}{45 \times (208 + 380) + 208 \times 380} = 0,162 .$$

6°



■ Réponse sujet thermodynamique n° 2, 3^{ème} EMD, ENTP, Alger 1999 :

1° Première étape: compression isotherme réversible

Le volume initial V_0 du gaz est donné par l'équation d'état du gaz parfait :

$$p_0 V_0 = RT_0 \Rightarrow V_0 = \frac{RT_0}{p_0}$$

Application numérique :

$$V_0 = \frac{8,32 \times 300}{10^5} = 24,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

ou encore

$$V_0 = 24,96 \text{ l} .$$

On fait d'abord passer le gaz réversiblement de l'état initial $A(p_0, V_0, T_0)$ à l'état $B(p_1, V_1, T_0)$.

D'après la loi de Mariotte, appliquée à l'isotherme AB, on a

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{p_0}{p_1} V_0 = \frac{1}{10} V_0 . \quad (1)$$

Application numérique :

$$V_1 = \frac{24,96}{10} \approx 2,49 \text{ l} .$$

Deuxième étape : détente adiabatique réversible

On fait subir au gaz une détente adiabatique réversible de l'état $B(p_1, V_1, T_0)$ à l'état $C(p_0, V_2, T_1)$. A la fin de la détente adiabatique, le volume V_2 est donné par l'équation de Laplace :

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Application numérique :

$$V_2 = 2,496 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \approx 12,9 \text{ l}.$$

L'équation de Laplace relative aux variables thermodynamiques p et T permet d'obtenir la température T_1 :

$$T_0^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_1^\gamma p_0^{1-\gamma} \Rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (2)$$

Application numérique :

$$T_1 = 300 \times 10^{-2} \text{ K} \approx 155,6 \text{ K}.$$

2° Première étape:

La transformation AB étant isotherme réversible, la variation d'entropie du gaz vaut :

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_0}.$$

Par ailleurs, l'énergie interne du gaz n'a pas varié. On en déduit que la chaleur échangée entre le gaz et le milieu extérieur est $Q_{AB} = -W_{AB}$. Le travail élémentaire reçu par le gaz est

$\delta W = -pdV = -RT_0 \frac{dV}{V}$ qui s'intègre en $W_{AB} = -RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln \frac{V_0}{V_1}$. En tenant compte de

l'équation (1), ce travail peut aussi s'écrire :

$$W_{AB} = RT_0 \ln \frac{p_1}{p_0} = RT_0 \ln 10,$$

d'où

$$\Delta S_{AB} = \frac{-RT_0 \ln 10}{T_0} = -R \ln 10.$$

Application numérique :

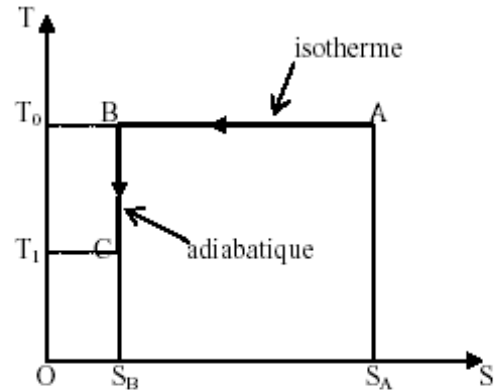
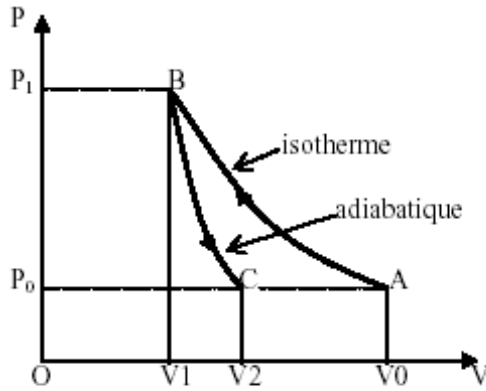
$$\Delta S_{AB} = -8,32 \times \ln 10 \approx -19,16 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Deuxième étape:

Au cours de la transformation adiabatique réversible BC, la variation d'entropie du gaz est nulle : $\Delta S_{BC} = 0$. Donc la variation d'entropie ΔS_1 du gaz au cours de cette transformation à deux étapes est :

$$\Delta S_1 = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = -19,16 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

3°

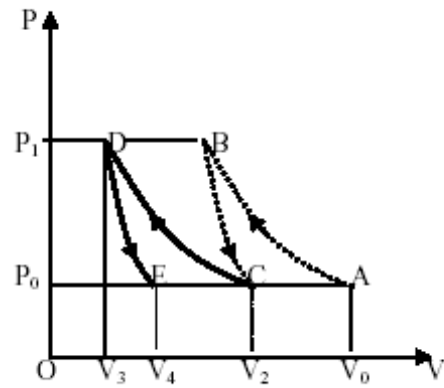


4° En partant de l'état $C(p_0, V_2, T_1)$, on effectue une compression isotherme jusqu'à l'état $D(p_1, V_3, T_1)$ suivie d'une détente adiabatique jusqu'à l'état $E(p_0, V_4, T_2)$ (figure ci-contre). La température T_2 est donnée par l'équation de Laplace :

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_0^{1-\gamma},$$

et en remplaçant T_1 par son expression, donnée par l'équation (2), on obtient :

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{2 \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)}.$$



Application numérique :

$$T_2 = 300 \times 10^{-4/7} \approx 80,5 \text{ K}.$$

La variation d'entropie au cours de cette transformation à deux étapes est celle obtenue au cours de la transformation isotherme, soit $\Delta S_{CD} = -R \ln 10$. Donc, à la fin des deux premières transformations, la variation d'entropie vaut :

$$\Delta S_2 = \underbrace{\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}}_{1^{\text{ère}} \text{ transformation}} + \underbrace{\Delta S_{CD} + \Delta S_{DE}}_{2^{\text{ème}} \text{ transformation}} = -2R \ln 10.$$

Application numérique :

$$\Delta S_2 = -2 \times 8,32 \times \ln 10 \approx 38,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

5° A la fin de la $n^{\text{ième}}$ transformation à deux étapes, on en déduit que la température T_n s'écrit :

$$T_n = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^n \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right),$$

et la variation d'entropie est :

$$\Delta S_n = -nR \ln 10.$$

6° Pour savoir si on peut atteindre le zéro absolu, on doit calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^n \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^n \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) = 0 \quad \text{car } \frac{p_0}{p_1} < 1.$$

Il faudrait donc un nombre infini de transformations pour atteindre le zéro absolu, ce qui est impossible à réaliser.